MÉMOIRE

SUR DIVERSES INTÉGRALES DÉFINIES.

PAR GEORGES BIDONE.

TURIN, MAI 1812.

Chez FÉLIX GALLETTI Imprimeur de l'Académie Impériale des Sciences, etc.

MÉMOIRE

SUR DIVERSES INTÉGRALES DÉFINIES.

Par GEORGES BIDONE.

Les beaux résultats qu'on ajoute continuellement au calcul des intégrales définies, et l'heureux emploi qu'on en fait pour la solution de plusieurs questions intéressantes, montrent quelle importance on doit attacher à l'avancement de cette nouvelle branche d'analyse. Telle est à la vérité la nature de ce genre de recherches, qu'elles exigent le travail de Géomètres qui, de même qu'Euler qui en a jeté les premiers fondemens, réunissent à l'instant toutes les ressources que l'analyse peut fournir dans son ensemble. C'est ce qui se présente à l'esprit en lisant les beaux Mémoires qu'ont publiés sur cette matière les célèbres MM.rs Laplace, Legendre et Poisson.

Mais en admirant la supériorité des moyens que ces grands Géomètres ont employés dans ces recherches, on voit qu'ils tiennent souvent à des considérations et à des procédés trop éloignés, peut-être, de ceux sur lesquels repose l'intégration des fonctions à une seule variable, et auxquels il est naturel de penser que doit en dernier résultat se rapporter la recherche des valeurs des intégrales définies. C'est ce qui fait regarder cette recherche comme une partie isolée du calcul intégral, avec lequel elle ne paraît pas encore être coordonnée d'une manière directe, par la diversité des procédés qu'elle semble demander dans chaque cas particulier. On a cependant lieu de croire qu'il en sera de cette branche d'analyse, comme des autres, qui se simplifient en s'étendant, et prennent en se perfectionnant la place qu'elles doivent naturellement occuper dans les diverses parties de la science.

Ce sont ces réflexions qui m'ont porté à présenter à cet égard quelques vues, qui paraissent également propres à ramener ce genre de recherches aux procédés ordinaires du calcul intégral, et à faciliter l'intelligence de ce qu'on a fait sur cet objet, ainsi qu'à faire voir de nouveaux rapports, souvent assez remarquables.

Ce Mémoire est divisé en trois *articles* : Dans *le premier* je commence par l'intégration des différentielles $\frac{dx.\sin.x}{x^n}$, $\frac{dx.\cos.x}{x^n}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, n étant <2 dans la première de ces différentielles, et

ne pouvant surpasser l'unité dans la seconde. Le procédé qui m'a paru le plus simple, et qui n'est fondé que sur le développement des fonctions en séries, est celui que Mascheroni a publié dans son excellent ouvrage intitulé *Adnotationes ad Calculum integralem Euleri*, imprimé à Pavie en 1790; Ouvrage qui donne une haute idée de la sagacité de cet illustre Géomètre, et de ce qu'il aurait encore pu faire pour le progrès de l'analyse, et où il s'est occupé presqu'exclusivement d'un grand nombre d'intégrales définies, sur lesquelles on ne connaissait pas encore dans ce tems-là les recherches d'Euler.

Après avoir exposé ce procédé, j'examine les modifications que prennent les intégrales, lorsque ces différentielles sont $\frac{dx.\sin.rx}{x^n}$, $\frac{dx.\cos.rx}{x^n}$: Il résulte du calcul direct, que l'intégrale $\int\frac{dx.\cos.rx}{x}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$ n'est point indépendante de r, ainsi qu'elle le paraît au premier abord. Par cette propriété singulière on a entre ces limites ce théorème remarquable

$$\int\frac{dx\,(\cos.r'x-\cos.rx)}{x}=\log.r-\log.r';$$

Je passe ensuite au cas où l'exposant n dans les différentielles précédentes est un nombre quelconque, et je donne tous les termes qui composent ces intégrales définies; Ce qui offre l'avantage de faire connaître leur ordre d'infini, ainsi que leurs rapports et différences,

qui souvent peuvent être des quantités finies. Ces préliminaires posés, je passe aux intégrales $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^m}{x^n}$, $\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^m}{x^n}$, où il y a ceci de remarquable, que la première, lorsque n est un nombre entier $>$ 1 et $< m+1$, est toujours exprimée en termes finis par les logarithmes ou par la circonférence du cercle. L'intégrale définie est encore donnée ici avec tous ses termes, quelle que soit n.

Je considère également les intégrales $\int \frac{dx.\overline{\cos.x}^p.\overline{\sin.x}^q}{x^n}$, qui sont exprimées dans certains cas sous forme finie par les logarithmes ou par la circonférence du cercle. Cet article est terminé par l'intégrale $\int \frac{e^{-x}.dx}{x^n}$ développée avec le même procédé, dont M.r Mascheroni s'est servi pour intégrer $\int \frac{dx.\sin.x}{x}$: L'intégrale $\int \frac{e^{-ax}.dx}{x}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, a, de même que $\int \frac{dx.\cos.ax}{x}$, la propriété de n'être point indépendante de a, et l'on a dans ces limites

$$\int \frac{dx\,(e^{-a'x}-e^{-ax})}{x}=\log.a-\log.a'.$$

Dans le *second article* je considère l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2}$, que M.r LAPLACE a donnée le premier. Cette intégrale se refuse aux méthodes exposées dans l'article précédent ; Mais par un double développement dû à un changement d'ordre dans les limites, elle est ramenée directement aux intégrales connues $\int \frac{dx.\sin.rx}{x}$, $\int \frac{dx}{1+m^2x^2}$; et le procédé met en évidence la formation des coëfficiens numériques qui affectent la valeur de ces intégrales. La même méthode est ensuite appliquée à divers autres exemples tirés des Mémoires de MM.rs LAPLACE, LEGENDRE et POISSON. En la généralisant je l'applique à la recherche des valeurs d'autres intégrales, telles que $\int \frac{dx.\sin.rx}{x+m}$, $\int \frac{dx.\cos.rx}{x+m}$, $\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2+m^2}$, etc., les expressions qui en résultent, peuvent donner quelques idées sur la nature de ces transcendantes.

Dans le *troisième article* je présente les valeurs de diverses intégrales définies qu'on obtient par un seul développement en série, qui les donne par l'intégration immédiate, ou les fait dépendre d'autres intégrales connues. C'est ainsi que je trouve les intégrales suivantes, entre les limites $x=0$, $x=\infty$;

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x} = \frac{\pi}{2} = \int \frac{dx.\sin.rx}{x};$$

$$\int \frac{xdx.\text{tang}.rx}{x^2 + m^2} = \frac{\pi}{e^{2mr} + 1};$$

$$\int \frac{xdx.\text{coséc}.2rx}{x^2 + m^2} = \frac{\pi.e^{2mr}}{e^{4mr} - 1};$$

$$\int \frac{xdx.\cot.rx}{x^2 + m^2} = \frac{\pi}{e^{2mr} - 1};$$

Les intégrales qui en dérivent réunies à celles que M.r LAPLACE a déduites de la valeur de $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2}$, étendent considérablement cette partie du calcul des intégrales définies.

ARTICLE PREMIER.

1. Soit $n < 2$, on aura, en mettant pour $\sin. x$ son développement en x, et intégrant

$$(1) \int \frac{dx.\sin.x}{x^n} = \frac{x^{2-n}}{2-n} - \frac{x^{4-n}}{(4-n)\,1.2.3.} + \frac{x^{6-n}}{(6-n)\,1.2.3.4.5.} - \ldots$$

où la constante est nulle, lorsque l'intégrale commence avec x. Maintenant on a en général

$$\int \frac{dx.\sin.x}{x^n} = -\frac{\cos.x}{x^n} - n\int \frac{dx.\cos.x}{x^{n+1}};$$

$$\int \frac{dx.\cos.x}{x^n} = \frac{\sin.x}{x^n} + n\int \frac{dx.\sin.x}{x^{n+1}};$$

d'où l'on déduit par des substitutions successives

$$\int \frac{dx.\sin.x}{x^n} = -\frac{\cos.x}{x^n} - \frac{n.\sin.x}{x^{n+1}}$$

$$+ \frac{n(n+1).\cos.x}{x^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2).\sin.x}{x^{n+3}}$$

$$(2) \qquad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-3).\cos.x}{x^{n+m-2}}$$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-2).\sin.x}{x^{n+m-1}}$$

$$+ n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-1)\int \frac{dx.\sin.x}{x^{n+m}}$$

m indique le nombre des termes qui précèdent le dernier, et il est de la forme $4p$, p étant un nombre entier positif.

Cela posé, si dans tous les termes du second membre de l'équation (2) on met pour sin.x et pour cos.x, leurs développemens en x, et qu'après cette substitution on intégre le dernier terme, l'équation (2) ainsi transformée n'acquerra aucun terme constant à cause de la valeur de $n < 2$, et elle sera identique avec l'équation (1): Or puisque cette dernière équation est nulle lorsque $x=0$, il s'en suit qu'à cette limite, le second membre de l'équation (2), transformée comme on vient de dire, sera aussi nul.

Soit $x=m=\infty$; Il est clair que tous les termes, qui dans le second membre de l'équation (2) précèdent le dernier, deviennent nuls; de manière cependant que la convergence diminue à mesure qu'on s'avance vers le dernier terme intégral, ainsi qu'on le voit par le rapport des coëfficiens des deux avant-derniers termes, rapport qui est l'unité, lorsque $x=m=\infty$: Ainsi le second membre se réduira à son dernier terme, qui est par conséquent la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.x}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, pourvu qu'on intégre en mettant pour sin.x son développement en x, et qu'on fasse $x=m=\infty$ après l'intégration, sans addition de constante arbitraire. D'après cela on aura

$$\int\frac{dx.\sin.x}{x^n}=n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\int\frac{dx.\sin.x}{x^{n+m}}=$$

$$n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\left\{\frac{x^{2-m-n}}{2-m-n}-\frac{1}{1.2.3.}\cdot\frac{x^{4-m-n}}{4-m-n}\right.$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4.5.}\cdot\frac{x^{6-m-n}}{6-m-n}-\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\pm\frac{1}{1.2.3\ldots(2\nu-1)}\cdot\frac{x^{2\nu-m-n}}{2\nu-m-n}\mp\ldots\right\}$$

ν est le nombre des termes, et l'on doit prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que ν est impair ou pair. Faisons, dans le terme général $\pm\frac{1}{1.2.3\ldots(2\nu-1)}\cdot\frac{x^{2\nu-m-n}}{2\nu-m-n}$, $2\nu=m$; Ce terme général, multiplié par le coëfficient $n(n+1)\ldots(n+m-1)$, deviendra

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\cdots\frac{(n+m-2)}{m-1}\cdot\frac{(n+m-1)}{(-n)}.x^{-n}=-\frac{T}{(-n)}$$

en posant

$$T=\frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\cdots\frac{(n+m-2)}{(m-1)}\cdot\frac{(n+m-1)}{x^n};$$

Les termes qui suivent à droite du terme général $-\frac{T}{(-n)}$, sont

$$+\frac{T}{2-n}\cdot\frac{x^2}{m(m+1)}-\frac{T}{4-n}\cdot\frac{x^4}{m(m+1)(m+2)(m+3)}+\ldots.$$

et ceux qui précèdent à gauche, sont

$$+\frac{T}{-n-2}\cdot\frac{(m-2)(m-1)}{x^2}-\frac{T}{-n-4}\cdot\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)}{x^4}+\ldots;$$

faisant $x=m=\infty$, on a

$$\frac{x^2}{m(m+1)}=1=\frac{(m-2)(m-1)}{x^2}=\frac{x^4}{m(m+1)(m+2)(m+3)}=\text{etc.}$$

Les deux suites précédentes deviennent donc respectivement

$$\frac{T}{2-n}-\frac{T}{4-n}+\frac{T}{6-n}-\ldots$$

$$-\frac{T}{n+2}+\frac{T}{n+4}-\frac{T}{n+6}+\ldots$$

Par conséquent on aura depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$

$$\int\frac{dx.\sin.x}{x^n}=T.\begin{cases}\dfrac{1}{2-n}-\dfrac{1}{4-n}+\dfrac{1}{6-n}-\ldots\\[2ex] \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2+n}+\dfrac{1}{4+n}-\ldots\end{cases}$$

Mais on a

$$\frac{1}{2-n}-\frac{1}{4-n}+\frac{1}{6-n}-\ldots=\int\frac{u^{1-n}\,du}{1+u^2};$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2+n}+\frac{1}{4+n}-\ldots=\int\frac{u^{-1+n}}{1+u^2}.\,du;$$

en faisant $u=1$ après l'intégration. Donc enfin on aura

$$\text{(A)}\qquad\int\frac{dx.\sin.x}{x^n}=T\int\frac{u^{1-n}+u^{-1+n}}{1+u^2}.\,du$$

en faisant $u=1$ après l'intégration, et $m=\infty$ dans la valeur de

$$T=\frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\cdots\frac{(n+m-2)}{(m-1)}\cdot\frac{(n+m-1)}{m^n}.$$

2. Soit $n=1$, on aura $T=1$; $\int\frac{dx.\sin.x}{x}=2\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}$.

C'est la valeur que prend la série

$$x-\frac{x^3}{1.2.3.3.}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5.5.}-\ldots\ldots\ldots$$

lorsque $x=\infty$.

Soit $n=\frac{1}{2}$, on aura

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-1}{2m\sqrt{m}}$$

$$=\frac{1.3.5.\ldots\ldots(2m-1)}{2.4.6.\ldots\ldots\sqrt{2m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

à cause de $\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{3.3.5.5.7.7.9\ldots}$;

Il reste donc à intégrer la différentielle $\frac{u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2}.du$;

mais comme c'est ici qu'il s'est glissé dans les calculs de Mr Mascheroni une inadvertance qui a rendu inexacte la valeur de quelques intégrales définies, qu'il a données dans l'ouvrage cité, nous allons transcrire ses propres termes :

Nunc ut integretur $\int \frac{u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2} . du$, *fiat* $u^{\frac{1}{2}} = z$, *erit*

$$\int \frac{u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2} du = 2\int \frac{1+z^2}{1+z^4} dz =$$

$$\int \frac{dz}{1+2z\sqrt{\frac{1}{2}}+z^2} + \int \frac{dz}{1-2z\sqrt{\frac{1}{2}}+z^2} =$$

$$2\sqrt{2}.arc.tang. \frac{z\sqrt{\frac{1}{2}}}{1+z\sqrt{\frac{1}{2}}} + 2\sqrt{2}\, arc.tang. \frac{z\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-z\sqrt{\frac{1}{2}}};$$

et quoniam sumi debet $u = 1$, *ac proinde etiam* $z = 1$, *erit*

$$\int \frac{u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2} . du = 2\sqrt{2}.arc.tang\ 22°.30' + 2\sqrt{2}.arc.tang.67°.30' = \pi.\sqrt{2};$$

Erit ergo tandem

$$\int \frac{dx.sin.x}{\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}.$$

Or on trouve

$$\int \frac{dz}{1+2z\sqrt{\frac{1}{2}}+z^2} + \int \frac{dz}{1-2z\sqrt{\frac{1}{2}}+z^2} = \sqrt{2}.arc.tang. \frac{z\sqrt{\frac{1}{2}}}{1+z\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$+\sqrt{2}.arc.tang. \frac{z\sqrt{\frac{1}{2}}}{1-z\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, en faisant $z = 1$; Multipliant donc la valeur de T trouvée précédemment par $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$,

on a

$$\int \frac{dx.\sin.x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

résultat égal à celui, auquel M.r LAPLACE est parvenu par des considérations d'un autre genre (*Journal de l'écol. polytechniq.* 15.e *cahier*). Dans ce même endroit M.r LAPLACE démontre l'inexactitude du résultat de M.r MASCHERONI; mais on voit par ce qui précède, qu'elle ne tient point à la méthode.

3. Considérons maintenant l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.x}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, n étant <1. On a

$$\int \frac{dx.\cos.x}{x^n} = \frac{x^{1-n}}{1-n} - \frac{x^{3-n}}{1.2.(3-n)} + \frac{x^{5-n}}{1.2.3.4.(5-n)} - \dots$$

le second membre est nul avec x sans constante arbitraire. Par le procédé employé au n.° 1, on a encore

$$\int \frac{dx.\cos.x}{x^n} = \frac{\sin.x}{x^n} - \frac{n.\cos.x}{x^{n+1}} - \frac{n(n+1)\sin.x}{x^{n+2}} + \dots\dots$$

$$- \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m-3)\sin.x}{x^{n+m-2}}$$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m-2)\cos.x}{x^{n+m-1}}$$

$$+ n(n+1)(n+2)\dots(n+m-2)(n+m-1)\int \frac{dx.\cos.x}{x^{n+m}}$$

m indique le nombre des termes qui précèdent le der-

nier, et il est de la forme $4p$. Par un raisonnement analogue à celui fait dans le n.° 1, on prouvera qu' entre les limites $x=0$, $x=m=\infty$, on a

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x^n}=n(n+1)(n+2)....(n+m-2)(n+m-1)\int\frac{dx.\cos.x}{x^{n+m}}$$

pourvu qu'avant d'intégrer on mette dans le second membre le développement en x de $\cos.x$, et qu'on fasse $x=m=\infty$ après l'intégration, sans constante arbitraire. On aura donc

$$\int\frac{dx.\cos.x.}{x^n}=n(n+1)(n+2)....(n+m-1)\left\{\frac{x^{1-m-n}}{1-m-n}-\frac{1}{2}.\frac{x^{3-m-n}}{3-m-n}\right.$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4.}.\frac{x^{5-m-n}}{5-m-n}-..................$$

$$\left.\pm\frac{1}{1.2.3,..(2\nu-2)}.\frac{x^{2\nu-m-n-1}}{2\nu-m-n-1}\mp......\right\}$$

ν est le nombre des termes; s'il est impair on prendra le signe $+$, s'il est pair on prendra le signe $-$: Soit $2\nu=m$; Le terme général multiplié par le coëfficient $n(n+1)...(n+m-1)$ deviendra

$$-\frac{n}{1}.\frac{(n+1)}{2}.\frac{(n+2)}{3}....\frac{(n+m-3)}{m-2}.\frac{(n+m-2)}{x}.\frac{(n+m-1)}{(-n-1)}.x^{-n}=\frac{-V}{-n-1}$$

en posant

$$V=\frac{n}{1}.\frac{(n+1)}{2}.\frac{(n+2)}{3}....\frac{(n+m-3)}{m-2}.\frac{(n+m-2)}{x}.\frac{(n+m-1)}{x^n}.$$

Les termes qui suivent à droite, seront

$$+\frac{V}{1-n}\cdot\frac{x^2}{(m-1)m}\cdot-\frac{V}{3-n}\cdot\frac{x^4}{(m-1).m.(m+1)(m+2)}+\ldots$$

Les termes qui précèdent à gauche, seront

$$+\frac{V}{-3-n}\cdot\frac{(m-3)(m-2)}{x^2}-\frac{V}{-5-n}\cdot\frac{(m-5)(m-4)(m-3)(m-2)}{x^4}+\ldots.$$

dans le cas de $x=m=\infty$, ces deux suites deviennent

$$\frac{V}{1-n}-\frac{V}{3-n}+\frac{V}{5-n}-\ldots.,$$

$$-\frac{V}{3+n}+\frac{V}{5+n}-\frac{V}{7+n}+\ldots.$$

On aura donc depuis x nul jusqu'à x infini

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x^n}=V.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-n}-\frac{1}{3-n}+\frac{1}{5-n}-\ldots\\ \frac{1}{1+n}-\frac{1}{3+n}+\frac{1}{5+n}-\ldots\end{array}\right.$$

ou bien

$$(B)\qquad \int\frac{dx.\cos.x}{x^n}=V.\int\frac{u^n+u^{-n}}{1+u^2}\cdot du$$

en faisant $u=1$ après l'intégration, et $m=\infty$ dans la valeur de

$$V=\frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\ldots\frac{(n+m-3)}{m-2}\cdot\frac{(n+m-2)}{m}\cdot\frac{(n+m-1)}{m^n}.$$

4. Soit $n = \frac{1}{2}$, on aura $V = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$; $\int \frac{u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}}{1 + u^2} du = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$;

partant

$$\int \frac{dx.\cos.x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int \frac{dx.\sin.x}{\sqrt{x}}$$

Dans l'ouvrage de M.r Mascheroni on trouve encore ici l'inadvertance indiquée dans le n.° 2, à cause de l'intégrale $\int \frac{u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}}{1 + u^2} du$; ce qui l'a porté à conclure $\int \frac{dx.\cos.x}{\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$. Le même Géomètre a encore fait usage de ce résultat dans les deux intégrales données par Euler, $\int ds.\sin.\frac{s^2}{2a^2}$; $\int ds.\cos.\frac{s^2}{2a^2}$, pour lesquelles en posant $\frac{s^2}{2a^2} = x$, M.r Mascheroni trouve depuis $s = 0$ jusqu'à $s = \infty$

$$\int ds.\sin.\frac{s^2}{2a^2} = a.\sqrt{\pi} = \int ds.\cos.\frac{s^2}{2a^2}$$

tandis que la vraie valeur est

$$\int ds.\sin.\frac{s^2}{2a^2} = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} = \int ds.\cos.\frac{s^2}{2a^2}.$$

Aux intégrales

$$\int \frac{dx.\sin.x}{x} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int \frac{dx.\sin.x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int \frac{dx.\cos.x}{\sqrt{x}};$$

on peut joindre la suivante qui se présente également sous forme finie

$$\int \frac{dx.\sin.x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$$

Cette dernière intégrale s'obtient aussi sous cette forme par l'équation (5), pag. 250 du Mémoire cité de M.r LAPLACE, où pour la valeur numérique de cette intégrale on doit lire 2, 5066..., nombre au lieu duquel par faute d'impression on a mis 2, 25066...

Ces intégrales paraissent les seules, que les formules (A) et (B) puissent donner sous forme finie: mais il est évident que ces mêmes formules donnent directement la valeur des intégrales $\int \frac{dx.\sin.x}{x^n}$, $\int \frac{dx.\cos.x}{x^n}$ aussi approchées qu'on voudra, n étant comprise dans les limites indiquées.

5. Les méthodes précédentes sont dûes à M.r MASCHERONI, et avant d'aller plus loin, nous présenterons ici le procédé, d'après lequel ce même Géomètre a déterminé la constante arbitraire, pour que l'intégrale

$\int \frac{dx.\cos.x}{x}$ soit nulle à $x = \infty$. On a

$$(1) \quad \int \frac{dx.\cos.x}{x} = \text{Const.} + \log.x - \frac{x^2}{1.2.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.6} + \ldots$$

On a aussi

$$\int \frac{dx.\cos.x}{x} = \frac{\sin.x}{x} - \frac{\cos.x}{x^2} - \int \frac{2dx.\cos.x}{x^3}$$

$$(2) \quad = \frac{\sin.x}{x} - \frac{\cos.x}{x^2} + B + \frac{1}{x^2} + \log.x$$

$$- \frac{x^2}{2.3.4} + \frac{x^4}{4.\ 3.4.5.6} - \ldots\ldots$$

B étant la constante arbitraire, qui doit rendre nulle l'intégrale lorsque $x = \infty$. Substituant dans l'équation (2) les développemens de $\sin.x$ et de $\cos.x$, on aura deux termes constans, savoir 1 et $\frac{1}{2}$: tous les autres termes seront affectés de la variable x; en comparant donc l'équation (1) avec l'équation (2), on aura

$$\text{Const.} = B + 1 + \tfrac{1}{2}, \text{ ou } B = \text{Const.} - 1 - \tfrac{1}{2}.$$

Maintenant on a en général

$$\int \frac{dx.\cos.x}{x} = \frac{\sin.x}{x} - \frac{\cos.x}{x^2} - \frac{2\sin.x}{x^3} + \frac{2.3\cos.x}{x^4}$$

$$+ \frac{2.3.4\sin.x}{x^5} - \ldots\ldots + 2.3.4\ldots.(m-1).\frac{\cos.x}{x^m}$$

$$+ \int 2.3.4\ldots m.\frac{dx}{x^{m+1}}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots\ldots\right)$$

où la lettre m, qui indique le nombre des termes qui

précèdent le dernier, est de la forme $4p$, p étant un nombre entier positif. Intégrant le dernier terme de l'équation précédente on aura

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x}=\frac{\sin.x}{x}-\frac{\cos.x}{x^2}-\frac{2.\sin.x}{x^3}+\frac{2.3.\cos.x}{x^4}+\frac{2.3.4.\sin.x}{x^5}$$

$$-\cdots\cdots+2.3.4\cdots\cdots(m-1)\,.\,\frac{\cos.x}{x^m}+M$$

$$(3)\qquad +2.3.4\ldots m\left\{\frac{x^{-m}}{-m}-\frac{x^{2-m}}{2(2-m)}+\frac{x^{4-m}}{2.3.4.(4-m)}-\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{1.2.3.4\ldots(m-2)\,.\,2x^2}\right\}+\log.x$$

$$-\frac{x^2}{2(m+1)(m+2)}+\frac{x^4}{4(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}-\cdots$$

M étant la constante arbitraire qui rend nulle l'intégrale lorsque $x=\infty$.

On aura semblablement

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x}=\frac{\sin.x}{x}-\frac{\cos.x}{x^2}-\frac{2.\sin.x}{x^3}+\frac{2.3.\cos.x}{x^4}+\frac{2.3.4.\sin.x}{x^5}$$

$$-\cdots\cdots\cdots+2.3.4\ldots(m-1)\frac{\cos.x}{x^m}+2.3.4\ldots m\frac{\sin.x}{x^{m+1}}$$

$$(4)\qquad -2.3.4\ldots(m+1)\,.\,\frac{\cos.x}{x^{m+2}}$$

$$-\int 2.3.4\ldots(m+2)\frac{dx}{x^{m+3}}\left\{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\cdots\right\}$$

Intégrant ce dernier terme on aura $N+\log.x+S$; N

étant la constante qui rend nulle l'intégrale lorsque $x=\infty$, et S étant la somme des termes affectés de la variable. En mettant dans cette équation (4) au lieu des termes $2.3.4...m \cdot \frac{\sin.x}{x^{m+1}}$, $2.3.4...(m+1) \cdot \frac{\cos.x}{x^{m+2}}$, leurs développemens en x, on aura les constantes $\frac{1}{m+1}$, $\frac{1}{m+2}$, qui ajoutées à N, donneront par la comparaison de l'équation (3) avec (4), $M=N+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}$; $N=M-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}$; et puisque le même résultat a lieu lorsque m est de la forme $4p+2$, on en conclura enfin

$$M=\text{Const.}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{m};$$

Soit maintenant $x=m=\infty$, l'équation (3) deviendra

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x}=\text{Const.}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{m}+\log x$$
$$+\frac{m(m-1)}{2x^2}-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4x^4}+\ldots\ldots$$
$$-\frac{x^2}{2(m+1)(m+2)}+\frac{x^4}{4(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}-\ldots\ldots$$

La seconde ligne est formée par les termes qui dans l'équation (3) précèdent le terme $\log.x$, et qui ne sont pas nuls par la supposition de $x=m=\infty$; la troisième ligne est formée par les termes qui suivent $\log.x$

dans la même équation (3). Ces deux lignes se détruisent à cause de $x=m=\infty$; on a donc, lorsque $x=\infty=m$

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x}=\text{Const.}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{m}+\log.x=0$$

d'où

$$\text{Const.}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{m}-\log x;$$

ou bien, à cause de

$$\log.m=\log.x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{\mathfrak{A}}{2}+\frac{\mathfrak{B}}{4}-\frac{\mathfrak{C}}{6}+\frac{\mathfrak{D}}{8}-\cdots$$

($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ..., étant les nombres de Bernoulli)

$$\text{Const.}=0,577\,215\,664\,9015\ldots\ldots$$

nombre connu, et que nous nommerons A dans la suite. (*Calcul Intégral de M.*[r] Lacroix, *tom.* 3, *pag.* 134 *et* 481).

Le second membre de l'équation

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x}=0,577\,215\cdots+\log.x-\frac{x^2}{2.2}+\frac{x^4}{2.3.4.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6.6}+\cdots$$

sera donc nul lorsque $x=\infty$; de là on conclut entre les limites $x=0$, $x=\infty$,

$$\text{(C)}\qquad\int\frac{dx.\cos.x}{x}=-\log.x-0,577\,215\cdots=-\log.0-\text{A}=\infty,$$

équation qui donne l'ordre d'infini de cette intégrale.

6. Avant de présenter l'usage des intégrales (A), (B), (C) pour la détermination d'autres intégrales définies, nous nous proposons de voir ce que deviennent les intégrales précédentes, lorsque les différentielles sont

$\frac{dx.\sin.rx}{x^n}$; $\frac{dx.\cos.rx}{x^n}$; $\frac{dx.\cos.rx}{x}$; r étant un nombre quelconque constant. Considérons d'abord la première. Faisant $rx=z$, on a

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x^n}=\frac{1}{r^{1-n}}.\int\frac{dz.\sin.z}{z^n},$$

les intégrales étant prises depuis $x=z=0$ jusqu'à $x=z=\infty$; mais on a dans ces limites (n.° 1)

$$\int\frac{dz.\sin.z}{z^n}=T.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2-n}-\frac{1}{4-n}+\frac{1}{6-n}-\dots\\ \\ \frac{1}{n}-\frac{1}{2+n}+\frac{1}{4+n}-\dots\end{array}\right.$$

on aura donc

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x^n}=\frac{T}{r^{1-n}}.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2-n}-\frac{1}{4-n}+\frac{1}{6-n}-\dots\\ \\ \frac{1}{n}-\frac{1}{2+n}+\frac{1}{4+n}-\dots\end{array}\right.$$

Or en intégrant directement la différentielle $\int\frac{dx.\sin.rx}{x^n}$ par la méthode du n.° 1, on arrive à cette expression

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^n} = T \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{2-n} - \frac{r^3}{4-n} + \frac{r^5}{6-n} - \ldots \\ \\ \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{2+n} \cdot \frac{1}{r^3} + \frac{1}{4+n} \cdot \frac{1}{r^5} - \ldots \end{array} \right.$$

Ces deux expressions sont équivalentes; car en multipliant par r^{1-n} les deux membres de l'équation

$$\frac{1}{r^{1-n}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2-n} - \frac{1}{4-n} + \frac{1}{6-n} - \ldots \\ \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{2+n} + \frac{1}{4+n} - \ldots \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{2-n} - \frac{r^3}{4-n} + \frac{r^5}{6-n} - \ldots \\ \\ \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{2+n} \cdot \frac{1}{r^3} + \frac{1}{4+n} \cdot \frac{1}{r^5} - \ldots \end{array} \right.$$

la quantité r disparaît du premier membre, qui n'est plus fonction de cette lettre; par conséquent la différentielle du second membre par rapport à r doit être identiquement nulle: or c'est ce qui a effectivement lieu, car cette différentielle est

$$r^{1-n} - r^{3-n} + r^{5-n} - \ldots$$

$$- r^{-n-1} + r^{-n-3} - r^{-n-5} + \ldots$$

c'est-à-dire $\frac{r^{1-n} - r^{1-n}}{r + r^2} = 0;$

On a donc depuis $x = 0 = z$ jusqu'à $x = \infty = z$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^n} = \frac{1}{r^{1-n}} \int \frac{dz.\sin.z}{z^n};$$

n étant < 2.

On trouve pareillement et dans les mêmes limites

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^n} = \frac{1}{r^{1-n}} \int \frac{dz.\cos.z}{z^n};$$

n étant < 1.

Considérons enfin l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{x}$: Cette intégrale paraît d'abord indépendante de r, ainsi que l'est l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.rx}{x}$; car en faisant $rx = z$, on a $\int \frac{dx.\cos.rx}{x} = \int \frac{dz.\cos.z}{z}$, les limites de ces deux intégrales étant zéro et infini. Mais une pareille transformation nous conduirait, dans ce cas, à un résultat inexact; car en faisant directement le calcul sur l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{x}$, on arrive à l'équation suivante (n.° 5)

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x} = \text{Const.} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots\ldots - \frac{1}{m} + \log.x$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2r^2x^2} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4r^4.x^4} + \frac{m(m-1)\ldots(m-5)}{6r^6x^6} - \ldots$$

$$- \frac{r^2x^2}{2(m+1)(m+2)} + \frac{r^4x^4}{4(m+1)(m+2)\ldots(m+4)} - \frac{r^6x^6}{6(m+1)\ldots(m+6)} + \ldots$$

équation dans laquelle, lorsque r est différent de l'unité et qu'on fait $x=m=\infty$, les deux dernières lignes ne se détruisent plus, mais on a

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x}=\text{Const.}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{m}+\log.x$$

$$+\frac{1}{2r^2}-\frac{1}{4r^4}+\frac{1}{6r^6}-\ldots$$

$$-\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}+\ldots$$

$$=\text{Const.}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{m}+\log.x-\log.r;$$

on a donc

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x}=A+\log.r+\log.x-\frac{r^2x^2}{1.2.2}+\frac{r^4x^4}{2.3.4.4}-\frac{r^6x^6}{2.3.4.5.6.6}+\ldots$$

la constante étant déterminée de manière que le second membre est nul lorsque $x=\infty$. Partant on a depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$

$$\text{(D)}\qquad \int\frac{dx.\cos.rx}{x}=-\log.x-\log.r-A=-\log.0-\log.r-A=\infty;$$

où $A=0,577\,215\ldots$

On voit par cette expression que les deux intégrales $\int\frac{dx.\cos.x}{x}$, $\int\frac{dx.\cos.rx}{x}$, prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, ne sont égales qu'en ce que toutes les deux sont infinies du même ordre ; mais leur différence est finie, et l'on a en général ce résultat remarquable

$$\int \frac{dx.(\cos.r'x - \cos.rx)}{x} = \log.r - \log.r'.$$

7. Considérons à présent l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.rx}{x^n}$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, n étant un nombre entier égal à 2 ou plus grand que ce nombre : Soit d'abord n paire, on aura

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2} = \frac{-\sin.rx}{x} + r\int \frac{dx.\cos.rx}{x};$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^4} = -\frac{\sin.rx}{3x^3} - \frac{r.\cos.rx}{3.2x^2} + \frac{r^2\sin.rx}{3.2.1.x} - \frac{r^3}{3.2.1}\int \frac{dx.\cos.rx}{x}$$

en général

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^{2n}} = -\frac{\sin.rx}{(2n-1)x^{2n-1}} - \frac{r.\cos.rx}{(2n-1)(2n-2)x^{2n-2}} + \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{r^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 3.2.1}\int \frac{dx.\cos.rx}{x};$$

on prendra le signe + ou — selon que n est impaire ou paire. On voit par là que toutes ces intégrales se ramènent à $\int \frac{dx.\cos rx}{x}$; et les équations précédentes donnent tous les termes qui composent ces intégrales : ainsi l'on a depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2} = -r.\log.x - r.\log.r - Ar + r$$

$$= -r.\log.0 - r.\log.r - Ar + r = \infty;$$

etc.

On aura pareillement

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x^3}=\frac{-\sin.rx}{2x^2}-\frac{r\cos.rx}{2x}-\frac{r^2}{2.1}\int\frac{dx\sin.rx}{x},$$

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x^5}=\frac{-\sin.rx}{4x^4}-\frac{r\cos.rx}{4.3.x^3}+\frac{r^2.\sin.rx}{4.3.2x^2}+\frac{r^3.\cos.rx}{4.3.2.1x}+\frac{r^4}{4.3.2.1}\int\frac{dx.\sin.rx}{x},$$

$$\vdots$$

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x^{2n+1}}=\frac{-\sin.rx}{2nx^{2n}}-\frac{r.\cos.rx}{2n(2n-1)x^{2n-1}}+\dots\dots\dots$$

$$\pm\frac{r^{2n}}{2n(2n-1)(2n-2)\dots3.2.1}\int\frac{dx.\sin.rx}{x};$$

le signe + a lieu si n est paire; le signe —, si n est impaire.

On aura ainsi depuis x nul jusqu'à x infini

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x^3}=\frac{r}{x}-\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{r}{0}-\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\infty;$$

etc.

Ces équations ont le même avantage que les précédentes, celui de mettre en évidence tous les termes de l'intégrale et son ordre d'infini, ce qui fournit le moyen d'avoir le rapport ou la différence de ces mêmes intégrales: Ainsi l'on a, par exemple,

$$\frac{\int\frac{dx.\sin.rx}{x^2}}{\int\frac{dx.\sin.rx}{x^3}}=0;\quad\frac{\int\frac{dx.\sin.rx}{x^2}}{\int\frac{dx.\cos.rx}{x}}=r;$$

$$\int \frac{dx.(\sin.x - x.\cos.x)}{x^2} = 1;$$

etc.

Si n est de la forme $p + \frac{\alpha}{\beta}$, p étant un nombre entier égal à 2 ou plus grand que 2, et $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction propre, on arrivera à l'une ou à l'autre de ces intégrales $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, $\int \frac{dx \sin rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, que l'on sait intégrer par les équations (A) et (B) (n.ºs 1 et 3) et l'on aura par là tous les termes de l'intégrale. Ainsi on a

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{-2.\sin.rx}{3.x^{\frac{3}{2}}} - \frac{2^2 r.\cos.rx}{3.1.x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2^2 r^2}{3.1.} \int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}};$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{-2.\sin.rx}{(2n-1)x^{\frac{2n-1}{2}}} - \frac{2^2.r\cos.rx}{(2n-1)(2n-3)x^{\frac{2n-3}{2}}} + \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{2^n r^n}{(2n-1)(2n-3)\ldots3.1.} \int \frac{dx. \begin{matrix}\cos.rx \\ \sin.rx\end{matrix}}{\sqrt{x}};$$

le signe + a lieu si n est de la forme $4p$ ou $4p+1$; le signe —, si n est de la forme $4p+3$ ou $4p+2$: On écrira $\cos.rx$, lorsque n est impaire, et $\sin.rx$, lorsque n est paire.

Ainsi l'on a entre les limites $x=0$, $x=\infty$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2\sqrt{x}} = \frac{2r}{\sqrt{x}} - \frac{4r^2}{3.1}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2r}} = \frac{2r}{\sqrt{0}} - \frac{4r^2}{3.1}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2r}} = \infty;$$

etc.

8. On a semblablement

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{-\cos.rx}{x} - r.\int \frac{dx.\sin.rx}{x};$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^4} = \frac{-\cos.rx}{3x^3} + \frac{r.\sin.rx}{3.2.x^2} + \frac{r^2.\cos.rx}{3.2.1.x} + \frac{r^3}{3.2.1}\cdot\int \frac{dx.\sin.rx}{x};$$

$\vdots$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{2n}} = \frac{-\cos.rx}{(2n-1)x^{2n-1}} + \frac{r.\sin.rx}{(2n-1)(2n-2)x^{2n-2}}$$

$$+ \frac{r^2.\cos.rx}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)x^{2n-3}}$$

$$- \cdots\cdots \pm \frac{r^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots 3.2.1}\int \frac{dx.\sin.rx}{x};$$

On prendra le signe supérieur ou l'inférieur, selon que n est paire ou impaire. Ainsi on a depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{x} - r.\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} - r.\frac{\pi}{2} = \infty;$$

etc.

On a de la même manière

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^3} = \frac{-\cos.rx}{2x^2} + \frac{r.\sin.rx}{2.1.x} - \frac{r^2}{2.1.}\int \frac{dx.\cos.rx}{x};$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^5} = \frac{-\cos.rx}{4x^4} + \frac{r.\sin.rx}{4.3.x^3} + \frac{r^2\cos.rx}{4.3.2.x^2} - \frac{r^3\sin.rx}{4.3.2.1.x}$$

$$+ \frac{r^4}{4.3.2.1}\int \frac{dx.\cos.rx}{x};$$

$\vdots$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{2n+1}} = \frac{-\cos.rx}{2nx^{2n}} + \frac{r.\text{rin}.rx}{2n(2n-1)x^{2n-1}} + \frac{r_2\cos.rx}{2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-2}}$$

$$- \cdots\cdots\cdots \pm \frac{r^{2n}}{2n(2n-1)\cdots\cdots 3.2.1.}\int \frac{dx.\cos.rx}{x};$$

On prendra le signe supérieur ou l'inférieur, selon que n est paire ou impaire.

On déduit ainsi depuis $x = 0$ jusqu'à x infini,

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^3} = \frac{1}{2x^2} - \frac{3r^2}{4} + \frac{r^2}{2} \cdot \left\{ A + \log.r + \log..x \right\}$$

$$= \frac{1}{2.0^2} - \frac{3.r^2}{4} + \frac{r^2}{2} \cdot \left\{ A + \log r + \log 0 \right\};$$

etc.

Si n est de la forme $p + \frac{\alpha}{\beta}$, l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{p+\frac{\alpha}{\beta}}}$ dépendra de l'une des intégrales $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, $\int \frac{dx.\sin.rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$:

On a par exemple

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2.\cos.rx}{\sqrt{x}} - 2r.\int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}};$$

$\vdots$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{-2.\cos.rx}{(2n-1)x^{\frac{2n-1}{2}}} + \frac{2{\cdot}2r.\sin.rx}{(2n-1)(2n-3)x^{\frac{2n-3}{2}}}$$

$$+ \frac{2^3.r^2.\cos.rx}{(2n-1)(2n-3)(2n-5).x^{\frac{2n-5}{2}}} - \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{2^n.r^n}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots3.1} \int \frac{dx.\begin{matrix}\cos.rx\\ \sin rx\end{matrix}}{\sqrt{x}}:$$

On prendra le signe $+$, si n est de la forme $4p$ ou $4p+3$; on prendra le signe $-$, si n est de la forme $4p+1$ ou $4p+2$: on écrira $\cos.rx$, si n est paire, et $\sin rx$, si n est impaire.

On conclut de là

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{2r\pi} = \frac{2}{\sqrt{0}} - \sqrt{2r\pi} = \infty ; \text{etc.}$$

9. On voit par les deux numéros précédens, que $\int \frac{dx.\sin.rx}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$ est toujours infinie, lorsque $n=2$ ou >2 : L'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^n}$ est également infinie dans les mêmes limites, lorsque $n=1$ ou >1 : Mais l'ordre de ces infinis varie suivant la valeur de l'exposant n, et les équations précédentes donnent immédiatement tous les ter-

mes qui forment ces intégrales. On peut par là en déduire des résultats assez remarquables, et qu'il paraît difficile à pouvoir obtenir par d'autres moyens ; ainsi l'on a par les n.os précédens,

$$\int \frac{dx.(\cos.r'x - \cos.rx)}{x^2} = (r - r')\frac{\pi}{2};$$

et faisant $r = 1$, on a

$$\int \frac{dx.(\sin x - x\cos.x)}{x^3} = \frac{\pi}{4};$$

$$\int \frac{dx.(\sin.x - x.\cos.x)}{x^2\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

etc.

ces intégrales étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$.

10. Passons maintenant aux intégrales renfermant des puissances de $\sin.rx$ et $\cos.rx$, et considérons en premier lieu l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, q étant un nombre entier positif, et $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction propre: On a

$$2^{2q-1}\overline{\sin.rx}^{2q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ \ldots\ q}$$

$$- \frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}\cos.2rx$$

$$+ \frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ \ldots(q+2)} \cdot \cos.4rx$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+3)}\cos.6rx$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mp 2q.\cos.(2q-2)rx \pm \cos.2qrx\,;$$

formule dans laquelle les signes sont alternativement positifs et négatifs. Multipliant les deux membres de cette équation par $\frac{dx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, et intégrant, on aura

$$2^{2q-1}.\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}=\frac{1}{2}.\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots q}.\frac{x^{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{1-\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+1)}\int\frac{dx.\cos.2rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+2)}\int\frac{dx.\cos.4rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

la constante est nulle avec x. Lorsque $x=\infty$, le premier terme du second membre devient infini, et tous les termes suivans sont finis: L'intégrale dont il s'agit est donc un infini de l'ordre $1-\frac{\alpha}{\beta}$, et l'équation précédente donne tous les termes qui en composent la valeur.

On trouve, par exemple, entre les limites $x=0$, $x=\infty$

$$2\cdot\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{r}}=2\sqrt{\infty}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{r}}=\infty.$$

Soit à présent $\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x}$; on trouvera depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$

$$2^{2q-1}\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2q(2q-1)(2q-2)\,..(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\,.\,.\,.\,q}\log.\infty$$

$$+\left\{\frac{2q(2q-1)(2q-2)...q}{1.\quad 2.\quad 3.\,.\,.\,(q+1)}-\frac{2q(2q-1)(2q-2)...(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\,.\,.\,(q+2)}\right.$$

$$\left.+\,.\,.\,.\,.\,\mp 2q\pm 1\right\}\left\{A+\log.r\right\}$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2).\,.\,.\,q}{1.\quad 2.\quad 3...(q+1)}\log.2-\frac{2q(2q-1)(2q-2)...(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\,.\,.\,(q+2)}\log.4$$

$$+\,.\,.\,.\,.\mp 2q.\log.(2q-2)\pm\log.2q:$$

Cette équation montre que la valeur de l'intégrale $\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, est infinie, et que l'ordre de cet infini est le même quelque soit le nombre entier positif q. Ainsi on a en général

$$\frac{\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x}}{\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q'}}{x}}=\frac{2^{2q'}}{2^{2q}}\cdot\frac{2q(2q-1)(2q-2)...(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\,.\,.\,.\,q}\cdot\frac{1}{2q'}\cdot\frac{2}{(2q'-1)}\cdot\frac{3}{(2q'-2)}\cdots\frac{(q')}{(q'+1)}$$

On a aussi

$$\int \frac{dx.(3.\overline{\sin.rx}^2 - 4\,\overline{\sin.rx}^4)}{x} = \frac{\log.2}{2};$$

etc.

11. Considérons l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{2n}}$, où n est un nombre entier positif, qui ne peut être <1, ni $>q$; on aura

$$2^{2q-1}\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{2n}} = \frac{1}{2}.\frac{2q(2q-1)(2q-2)....(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\;....\;q.}.\frac{1}{(1-2n)x^{2n-1}}$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)...\,q}{1.\quad 2.\quad 3...(q+1)}\int \frac{dx.\cos.2rx}{x^{2n}}$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)...(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\;...\;(q+2)}\int \frac{dx.\cos.4rx}{x^{2n}}$$

$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\mp 2q\int \frac{dx.\cos.(2q-2)rx}{x^{2n}} \pm \int \frac{dx.\cos.2qrx}{x^{2n}}:$$

Dans cette équation tout est connu, parceque les intégrales qui entrent dans le second membre, sont données par le n.° 8 : mais, sans passer par le développement de ces intégrales, on peut avoir tout de suite la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx\,\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{2n}}$ par les considérations suivantes. Si l'on met pour $\overline{\sin.rx}^{2q}$ son développement en x,

et qu'on intègre la différentielle $\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{2n}}$, il est visible que l'intégrale sera nulle avec x sans constante arbitraire. Mais l'équation précédente doit être identique avec l'intégrale développée de la manière dont nous venons de dire, pourvu qu'on y substitue au lieu des fonctions circulaires leurs développemens dans les termes $\int\frac{dx.\cos.2rx}{x^{2n}}$, $\int\frac{dx.\cos.4rx}{x^{2n}}$, etc. Cette équation est donc aussi nulle avec x. Mais lorsque x est infini, l'équation précédente devient, en notant que dans ce cas on a (n° 8).

$$\int\frac{dx\cos.2rx}{x^{2n}} = \pm\frac{(2r)^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}\int\frac{dx\sin.2rx}{x}$$

$$= +\frac{(2r)^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$\int\frac{dx.\cos 4rx}{x^{2n}} = \pm\frac{(4r)^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}\cdot\frac{\pi}{2};$$

etc.

$$2^{2q-1}\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{2n}} = \pm\frac{r^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left\{-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\ 2.\ 3\ldots(q+1)}\cdot 2^{2n-1}\right.$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\ 2.\ 3\ldots(q+2)}\cdot 4^{2n-1}$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-2)}{1.\ 2.\ 3\ldots(q+3)}\cdot 6^{2n-1}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\mp 2q(2q-2)^{2n-1} \pm (2q)^{2n-1} \Big\}.$$

Si n est paire, on prendra $+ r^{2n-1}$; si n est impaire, on prendra $- r^{2n-1}$: Les termes affectés des puissances 2^{2n-1}, 4^{2n-1}, etc., se suivent avec les signes alternatifs. L'on a ainsi depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx\,\overline{\sin. rx}^2}{x^2} = \frac{r\,\pi}{2};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin\, rx}^4}{x^2} = \frac{r\pi}{4};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin. rx}^4}{x^4} = \frac{r^3\,\pi}{3};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin. rx}^6}{x^2} = \frac{3r\,\pi}{16};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin. rx}^{10}}{x^2} = \frac{35.r\pi}{256};$$

etc.

12. On aura pareillement entre les limites $x=0$, $x=\infty$, en notant que

$$0 = \frac{-2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)} \cdot 2^{2n} + \frac{2q(2q-1)(2q-2.)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+2)} \cdot 4^{2n}$$

$$\frac{-2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+3)} \cdot 6^{2n} + \ldots \mp 2q.(2q-2)^{2n} \pm (2q)^{2n},$$

$$2^{2q-1}\int \frac{dx.\overline{\sin rx}^{2q}}{x^{2n+1}} = \pm \frac{r^{2n}}{2n(2n-1)\ldots 3.2.1}\left\{\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}.2^{2n}\cdot \log.2\right.$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.4^{2n}\cdot \log 4$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+3)}.6^{2n}.\log 6$$

$$\vdots$$

$$\left.\pm 2q.(2q-2)^{2n}.\log.(2q-2) \mp (2q)^{2n}.\log.2q\right\}:$$

Dans ces deux équations n est un nombre entier positif, qui ne peut être < 1, et qui doit être $< q$: Si n est paire, on prendra $+ r^{2n}$; si n est impaire, on prendra $- r^{2n}$: Les termes affectés des logarithmes, log 2, log. 4, etc. se suivent avec les signes alternatifs. L'on a, par exemple,

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^3} = r^2.\log.2;$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{x^3} = \left(\frac{24.\log.2-9.\log 3}{16}\right).r^2;$$

$$\int \frac{dx\,\overline{\sin rx}^6}{x^5} = \left(\frac{27\log.3-32.\log.2}{16}\right).r^4;$$

etc.

13. D'après ce qui précède on voit que la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin rx}^{2q}}{x^{n+\frac{\alpha}{\beta}}}$ dépend des formules (A) et (B) (n.ºs 1 et 3);

n étant un nombre entier, et $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction propre, de manière que $n+\frac{\alpha}{\beta}<2q+1$. Nous nous occuperons seulement du cas où $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{2}$, car alors la valeur de l'intégrale se présente sous forme finie. Par le même raisonnement fait au n.° 11, on aura

$$2^{2q-1}\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{n+\frac{1}{2}}}=\pm\frac{2^{2n-1}.r^{n-\frac{1}{2}}.\sqrt{\pi}}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots3.1.}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2q.(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}\\ +\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}2^{n-\frac{1}{2}}\\ -\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-2)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+3)}.3^{n-\frac{1}{2}}\\ \vdots\\ \mp 2q(q-1)^{n-\frac{1}{2}}\pm q^{n-\frac{1}{2}}\end{array}\right\};$$

où l'on prendra le signe +, si n est de la forme $4p$ ou $4p+3$: on prendra le signe —, si n est de la forme $4p+1$ ou $4p+2$. Les termes renfermés dans les parenthèses se suivent avec les signes alternatifs. On trouve, par exemple

$$\int\frac{dx\,\overline{\sin.rx}^{2}}{2\sqrt{x}}=\sqrt{\pi r};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{4r.\sqrt{\pi.r}}{3};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x\sqrt{x}} = \frac{(4-\sqrt{2})\sqrt{\pi r}}{4};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^2\sqrt{x}} = \frac{r(4-2\sqrt{2})\sqrt{\pi r}}{3};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{x^5\sqrt{x}} = \left(\frac{15-6.2^4.\sqrt{2}+3^4.\sqrt{3}}{9.7.5.3.1}\right) 2^4.r^4\sqrt{\pi r};$$

etc.

14. De l'équation

$$2^{2q}.\overline{\sin.rx}^{2q+1} = \frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(q+1)}\sin.rx$$
$$-\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+2)}\sin.3rx$$
$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(q+3)}.\sin.5rx$$
$$\vdots$$
$$\pm(2q+1)\sin.(2q-1)rx \mp \sin.(2q+1)rx;$$

et de ce que l'on a

$$0 = \frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(q+1)}$$
$$-\frac{(2q+1).2q(2q-1)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+2)}3^{2n-1}$$
$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(q+3)}.5^{2n-1}$$
$$\vdots$$
$$\pm(2q+1).(2q-1)^{2n-1} \mp (2q+1)^{2n-1};$$

n étant un nombre entier positif tel que $n < q+1$; on conclura depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$2^{2q}\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x^{2n}}=\pm\frac{r^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1.}\left\{\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.3^{2n-1}.\log.3\right.$$

$$-\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+3)}.5^{2n-1}.\log.5$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q-2)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+3)}.7^{2n-1}.\log.7$$

$$\vdots$$

$$\left.\mp(2q+1)(2q-1)^{2n-1}.\log.(2q-1)\pm(2q+1)^{2n-1}.\log.(2q+1)\right\}:$$

on prendra $+r^{2n-1}$, si n est impaire, et $-r^{2n-1}$, si n est paire. Les termes renfermés dans les parenthèses ont les signes alternatifs. On a ainsi ces intégrales,

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{3}}{x^2}=\frac{3r.\log.3}{4};$$

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{5}}{x^2}=\left(\frac{15.\log.3-5.\log.5}{16}\right).r;$$

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{5}}{x^4}=\left(\frac{5^3.\log.5-5.3^3.\log.3}{16}\right).\frac{r^3}{1.2.3};$$

etc.

15. On aura encore, n étant un nombre entier positif, tel que $n < q+1$,

$$2^{2q}\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x^{2n+1}}=\pm\frac{r^{2n}}{2n(2n-1)\ldots3.2.1}.\frac{\pi}{2}.\left\{\frac{(2q+1)2q(2q-1)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\,.(q+1)}\right.$$

$$-\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.3^{2n}$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+3)}.5^{2n}$$

$$\vdots$$

$$\pm(2q+1)(2q-1)^{2n}\mp(2q+1)^{2n}\Big\};$$

où l'on prendra $+r^{2n}$, si n est paire, et $-r^{2n}$, si n est impaire. Les autres termes ont les signes alternatifs. On en déduit ces exemples,

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x^3}=\frac{3r^2.\pi}{8};$$

$$\int\frac{dx.\overline{\sin rx}^5}{x^3}=\frac{5r^2.\pi}{32};$$

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x^5}=\frac{115.r^4.\pi}{384};$$

etc.

Si $n=0$, la formule précédente est remplacée par celle-ci

$$2^{2q}.\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x}=\frac{\pi}{2}.\Big\{\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}$$

$$-\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+3)}$$

$$\vdots$$

$$\pm(2q+1)\mp 1\Big\};$$

qui donne

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x} = \frac{\pi}{4};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x} = \frac{3\pi}{16};$$

etc.

16. L'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x^{n+\frac{\alpha}{\beta}}}$ dépend des intégrales (A) et (B) (n.os 1 et 3), n étant zéro, ou un nombre entier quelconque tel que $n+\frac{\alpha}{\beta} < 2q+2$; $\frac{\alpha}{\beta}$ étant une fraction propre. Nous considérerons le cas de $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$, pour lequel on trouve

$$2^{2q}\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \pm \frac{2^{n-\frac{1}{2}}.r^{n-\frac{1}{2}}}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1.}\sqrt{\pi}.\left\{\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+1)}\right.$$

$$-\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+2)}.3^{n-\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+3)}.5^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\vdots$$

$$\left.\pm(2q+1)(2q-1)^{n-\frac{1}{2}} \mp (2q+1)^{n-\frac{1}{2}}\right\}:$$

On prendra le signe +, si n est de la forme $4p$ ou $4p+1$; et le signe —, si n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$. Les autres termes sont alternativement positifs et négatifs. On tire de là ces intégrales depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x\sqrt{x}} = \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2r\pi}}{4};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x^2\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{3}-1).r\sqrt{2r\pi}}{2};$$

etc.

Si $n=0$, l'équation précédente est remplacée par celle-ci

$$2^{2q}\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}.\left\{\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots.(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots.(q+1)}\right.$$

$$-\frac{(2q+1)2q.(2q-1)\ldots.q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots.(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots.(q+3)}.\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\vdots$$

$$\left.\pm(2q+1).\frac{1}{\sqrt{2q-1}}\mp\frac{1}{\sqrt{2q+1}}\right\};$$

L'on a ainsi

$$\int \frac{dx.\overline{\sin rx}^3}{\sqrt{x}} = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}\right).\sqrt{\frac{\pi}{2r}};$$

etc.

17. Passons à l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^{2q}}{x^n}$, où n est un nombre quelconque < 1; Il est clair que cette intégrale est nulle avec x: Maintenant on a

$$2^{2q-1}.\overline{\cos.rx}^{2q} = \frac{1}{2}.\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots q}$$
$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}.\cos.2rx$$
$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.\cos.4rx$$
$$\vdots$$
$$+2q\cos.(2q-2)rx+\cos.2qrx.$$

Si on multiplie cette équation par $\frac{dx}{x^n}$ et qu'on l'intègre; le premier terme du second membre sera infini avec x, tandis que les termes suivans seront finis entre les limites $x=0$, $x=\infty$. L'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^{2q}}{x^n}$ prise dans ces limites est donc un infini de l'ordre $1-n$. On aura ainsi par l'équation précédente tous les termes qui composent la valeur de cette intégrale.

Soit à présent $\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^{2q+1}}{x^n}$, n étant aussi < 1; il est visible que cette intégrale est nulle avec x: on a

$$2^{2q}.\overline{\cos.rx}^{\,2q+1} = \frac{(2q+1)2q.(2q-1)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}.\cos.rx$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.\cos.3rx$$

$$+\frac{(2q+1)\,2q.(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(q+3)}.\cos.5rx$$

$$\vdots$$

$$+(2q+1)\cos.(2q-1)rx+\cos.(2q+1)rx:$$

Multipliant cette équation par $\frac{dx}{x^n}$ et intégrant, on voit que l'intégrale $\int\frac{dx.\overline{\cos.rx}^{\,2q+1}}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$ est finie et dépend de la formule (B) (n.° 3). Soit $n=\frac{1}{2}$, on aura

$$2^{2q}\int\frac{dx\,\overline{\cos.rx}^{\,2q+1}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}.\left\{\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}\right.$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+3)}.\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\vdots$$

$$\left.+(2q+1).\frac{1}{\sqrt{2q-1}}+\frac{1}{\sqrt{2q+1}}\right\}:$$

d'où l'on tire

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^3}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\left\{3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2r}};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^5}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2^4}\left\{10 + \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}.\sqrt{\frac{\pi}{2r}};$$

etc.

18. Nous avons supposé dans les n.^{os} précédens, que l'exposant de x dans le dénominateur était renfermé entre certaines limites par rapport à l'exposant du numérateur: mais il est visible par ce qui précède, qu'on peut toujours avoir, quelle que soit la puissance de x, tous les termes qui composent la valeur de l'intégrale demandée. Ainsi on a depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x^5} = \frac{1}{4}\int\left\{\frac{3dx.\sin.rx}{x^5} - \frac{dx.\sin.3rx}{x^5}\right\}$$

$$= \frac{r^3}{x} - \frac{3.26}{2.3.4}.\frac{\pi}{8} = \frac{r^3}{0} - \frac{3.26}{2.3.4}.\frac{\pi}{8} = \infty;$$

d'où l'on conclut, entre ces limites,

$$\int\left(\frac{x^3 - \overline{\sin.x}^3}{x^5}\right)dx = \frac{3.26}{2.3.4}.\frac{\pi}{8}.$$

19. Il est facile de ramener aux intégrales des n.^{os} précédens celles de la forme $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^p.\overline{\cos.r'x}^q}{x^n}$, p et q étant des nombres entiers positifs, et r, r' des nombres quelconques constans. Considérons l'intégrale

$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{x^n}$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, et

supposons $r > r'$; nous aurons, en vertu de l'équation $2.\sin.rx.\cos.r'x = \sin.(r+r')x + \sin.(r-r')x$,

$$\int \frac{dx \sin.rx.\cos.r'x}{\sqrt{x}} = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{r+r'}} + \frac{1}{2\sqrt{r-r'}} \right\} . \sqrt{\frac{\pi}{2}} ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos r'x}{x} = \frac{\pi}{2} ;$$

$$\int \frac{dx \sin.rx.\cos r'x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi(r+r')} + \frac{1}{2} \sqrt{2\pi(r-r')} .$$

Soit à présent $r = r'$, on aura

$$2.\sin.rx.\cos.r'x = \sin.2rx ;$$

partant

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.rx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4} . \sqrt{\frac{\pi}{r}} ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.rx}{x} = \frac{\pi}{4} ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.rx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\pi.r} .$$

Soit enfin $r < r'$, on aura

$$2.\sin.rx.\cos.r'x = \sin.(r+r')x - \sin.(r'-r)x ,$$

d'où l'on conclut

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{r'+r}} - \frac{1}{2\sqrt{r'-r}} \right) . \sqrt{\frac{\pi}{2}} ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos r'x}{x} = 0 ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2} . \sqrt{2\pi(r'+r)} - \frac{1}{2} \sqrt{2\pi(r'-r)} .$$

On peut remarquer que la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{x}$ ne contient point les coëfficiens r, r'; mais qu'elle dépend uniquement du signe de la quantité $r-r'$: M[r] Legendre a considéré cette intégrale dans son ouvrage intitulé *Exercices de Calcul intégral*, pag. 361. Pareillement la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx \sin.rx}{x}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$ est indépendante de la grandeur du coëfficient r, mais elle varie avec le signe de ce coëfficient : Ainsi il est aisé de voir que l'on a

$$\text{lorsque } r>0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx}{x}=\frac{\pi}{2};$$

$$r=0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx}{x}=0;$$

$$r<0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin rx}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

Il est encore important de remarquer, que la valeur de l'intégrale définie peut paraître imaginaire, en changeant le signe de quelque constante dont elle est fonction, quoique cette valeur soit réelle. Dans ce cas on doit introduire ces changemens de signe dans la différentielle elle-même, et chercher ensuite sa valeur intégrale. D'après cela, puisque $\sin.rx$ est positif, nul ou négatif, selon que r est positif, nul ou négatif, on aura

lorsque $r > 0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}$;

$r = 0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}} = 0$;

$r < 0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2r}}$.

Considérons encore quelques autres exemples: on a

$$\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2 = \frac{\sin.(r+2r')x}{4} + \frac{\sin.(r-2r')x}{4} + \frac{\sin.rx}{2};$$

de cette équation on déduit, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

lorsque $r > 2r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{\pi}{2}$;

$r = 2r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{3\pi}{8}$;

$r < 2r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{\pi}{4}$.

Ces diverses valeurs ne dépendent que du signe de la quantité $r-2r'$. On trouve de la même manière, et dans les mêmes limites, en vertu de l'équation

$$\overline{\text{Sin}.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^2 = -\frac{\cos.(2r+2r')x}{8} + \frac{\cos.2r'x}{4} - \frac{\cos.(2r-2r')x}{8}$$

$$-\frac{\cos.2rx}{4} + \frac{1}{4};$$

lorsque $2r > 2r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^2}{x^2} = \frac{\pi}{4}.(2r-r');$

$$2r = 2r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^2}{x^2} = \frac{\pi.r}{4};$$

$$2r < 2r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^2}{x^2} = \frac{\pi r}{4}.$$

Soit enfin l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^3}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$: On a

$$\overline{\text{Sin}.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^3 = -\frac{\cos.(2r+3r')x}{8} + \frac{\cos.3r'x}{8} - \frac{\cos.(2r-3r')x}{16}$$

$$-\frac{3.\cos.(2r+r')x}{16} + \frac{3.\cos.r'x}{8} - \frac{3.\cos.(2r-r')x}{16};$$

On aura donc

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}.\left\{-\frac{1}{2\sqrt{2r+3r'}} + \frac{1}{\sqrt{3r'}} - \frac{1}{2\sqrt{2r-3r'}}\right.$$

$$\left. -\frac{3}{2\sqrt{2r+r'}} + \frac{3}{\sqrt{r'}} - \frac{3}{2\sqrt{2r-r'}}\right\};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^3}{x} = \frac{1}{16}.\log.\left\{\frac{(2r+r')^3.(2r-r')^3(2r+3r')(2r-3r')}{9.r'^8}\right\};$$

etc.

Si l'une des quantités $2r-3r'$, $2r-r'$, ou toutes les deux sont négatives, on écrira à leur place, dans ces valeurs, les quantités $3r'-2r$, $r'-2r$; ce qui résulte de ce qu'on a $\cos.(2r-3r')x = \cos.(3r'-2r)x$;

$\cos.(2r-r')x=\cos.(r'-2r)x$, et de ce que l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2\,\overline{\cos.r'x}^3}{x^n}$ est réelle, tant que les nombres r et r' sont réels, quelqu'en soit d'ailleurs le rapport. Cette remarque doit s'étendre aux cas semblables.

Soit $r=r'$, on aura

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx.}^2\,\overline{\cos.rx}^3}{x}=\frac{\log.15}{16};$$

Soit $2r=3r'$, on aura

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2\,\overline{\cos.\frac{2rx}{3}}^3}{x}=\frac{9}{16}.\log.2-\frac{1}{16}\left\{A+\log.r+\log.\infty\right\}=-\infty.$$

Il est facile de voir, par ces divers exemples, le procédé qu'on doit suivre pour avoir la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx\,\overline{\sin.rx}^p\,\overline{\cos.r'x}^q}{x^n}$, procédé qui se réduit à substituer à la place du produit $\overline{\sin.rx}^p.\overline{\cos.r'x}^q$ son expression équivalente en un nombre fini de termes de la forme $\sin.rx$ ou $\cos.rx$, ce qui est toujours possible, p et q étant des nombres entiers.

20. Nous terminerons cet article en appliquant à l'intégrale $\int \frac{e^{-x}dx}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, la méthode avec laquelle M.r Mascheroni a trouvé la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.x}{x^n}$. En mettant pour e^{-x} son dé-

veloppement en x, et intégrant, on a

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x^n} = \frac{x^{1-n}}{1-n} - \frac{x^{2-n}}{2-n} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{x^{4-n}}{4-n} + \ldots.$$

Cette intégrale est nulle avec x, lorsque $n < 1$. Supposons donc $n < 1$: Intégrant successivement par rapport au facteur $e^{-x}dx$, on a encore

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x^n} = \frac{-e^{-x}}{x^n} + \frac{ne^{-x}}{x^{n+1}} - \frac{n(n+1)e^{-x}}{x^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)e^{-x}}{x^{n+3}} - \ldots.$$

$$\ldots\ldots \pm n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\int \frac{e^{-x}dx}{x^{n+m}};$$

où m indique le nombre des termes qui précédent le dernier; et l'on prendra le signe supérieur ou l'inférieur, selon que m est paire ou impaire. En faisant sur cette équation les mêmes raisonnemens rapportés au n.° 1, on verra que cette expression est aussi nulle avec x. Soit $x = m = \infty$; l'équation précédente donnera

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x^n} = \pm n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\int \frac{e^{-x}dx}{x^{n+m}};$$

le second membre devant être intégré sans addition de constante arbitraire, et en y substituant pour e^{-x} son développement en x, en posant $x = m = \infty$ après l'intégration. On aura donc

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x^n} = \pm n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\left\{ \frac{x^{1-m-n}}{1-m-n} - \frac{x^{2-m-n}}{2-m-n} \right.$$

$$+ \frac{x^{3-m-n}}{1.2.(3-m-n)} - \frac{x^{4-m-n}}{1.2.3.(4-m-n)} + \ldots\ldots$$

$$\left. \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(\nu-1)}\cdot\frac{x^{\nu-m-n}}{\nu-m-n} \pm \ldots\ldots \right\} :$$

ν est le nombre des termes, et l'on prendra le signe $+$ ou le signe $-$ selon que ce nombre est impair ou pair.

Soit m paire, et soit $\nu = m$, le terme général du développement précédent, multiplié par le coëfficient $n(n+1)\ldots(n+m-1)$, deviendra

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\cdots\frac{(n+m-2)}{m-1}\cdot\frac{(n+m-1)}{x^n}\cdot\frac{1}{(-n)} = -\frac{T}{(-n)},$$

en posant

$$T = \frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\cdots\frac{(n+m-2)}{m-1}\cdot\frac{(n+m-1)}{x^n}.$$

Les termes qui suivent à droite, et ceux qui précèdent à gauche, sont respectivement

$$+\frac{T}{1-n}\cdot\frac{x}{m} - \frac{T}{2-n}\cdot\frac{x^2}{m(m+1)} + \frac{T}{3-n}\cdot\frac{x^3}{m(m+1)(m+2)} - \ldots;$$

$$+\frac{T}{-1-n}\cdot\frac{m-1}{x} - \frac{T}{-2-n}\cdot\frac{(m-1)(m-2)}{x^2} + \frac{T}{-3-n}\cdot\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{x^3} - \ldots;$$

Ces deux suites deviennent, à cause de $x = m = \infty$,

$$\frac{T}{1-n} - \frac{T}{2-n} + \frac{T}{3-n} - \ldots;$$

$$-\frac{T}{1+n} + \frac{T}{2+n} - \frac{T}{3+n} + \ldots;$$

On aura donc

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x^n} = T\cdot\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{n} - \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} - \frac{1}{3+n} + \ldots \\ \frac{1}{1-n} - \frac{1}{2-n} + \frac{1}{3-n} - \frac{1}{4-n} + \ldots \end{array}\right.$$

ou plus simplement

$$\int \frac{e^{-x} dx}{x^n} = T \cdot \int \frac{u^{n-1} + u^{-n}}{1+u} \cdot du;$$

en faisant $u=1$ après l'intégration, et $x=m=\infty$ dans la valeur de T. Soit $n=\frac{1}{2}$; on aura $T=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$2\int \frac{u^{-\frac{1}{2}} du}{1+u} = \pi$; partant $\int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}$. En faisant $x=t^2$, on aura $\int dt e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par la formule précédente on pourra toujours avoir la valeur approchée de l'intégrale $\int \frac{e^{-x} dx}{x^n}$; n étant une fraction quelconque.

Nous remarquerons ici, que l'intégrale $\int \frac{dx e^{-ax}}{x}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, a, comme l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.ax}{x}$, la propriété de n'être point indépendante de a.

Mr Mascheroni dans la première note de son ouvrage, insérée dans *le troisième volume du Calcul intégral de* Mr Lacroix, a trouvé que le second membre de l'équation

$$\int \frac{e^{-x} dx}{x} = 0,577215...+\log.x - x + \frac{x^2}{1.2.2} - \frac{x^3}{1.2.3.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.4} - ....$$

est nul lorsque $x=\infty$. En faisant directement le même

calcul sur l'intégrale $\int \frac{dx e^{-ax}}{x}$, on a

$$\int \frac{dx e^{-ax}}{x} = 0,577215 \ldots + \log.a + \log.x - ax + \frac{a^2 x^2}{1.2.2} - \frac{a^3 x^3}{1.2.3.3} + \ldots$$

où le second membre est nul lorsque $x = \infty$: d'où l'on conclut depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$,

$$\int \frac{dx e^{-ax}}{x} = -\log.0 - \log.a - 0,577215 \ldots = \infty;$$

$$\int \frac{dx(e^{-a'x} - e^{-ax})}{x} = \log.a - \log.a'.$$

ARTICLE DEUXIÈME.

---

21. Le procédé par lequel M.r Mascheroni a intégré les différentielles $\frac{dx.\sin.x}{x^n}$, $\frac{dx.\cos.x}{x^n}$ cesse d'être praticable, lorsque le dénominateur devient une fonction de la variable à plusieurs termes; ainsi, par exemple, la différentielle $\frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2}$ ne saurait être intégrée par ce procédé. M.r Laplace qui le premier en a donné l'intégrale définie depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$; y est parvenu par des considérations si élevées, qu'elles ne peuvent se présenter qu'au petit nombre de Géomètres capables d'embrasser d'un coup d'œil tout le systême des mathématiques. Nous allons proposer ici une autre méthode, qui met en évidence l'origine de tous les termes qui composent l'intégrale, et montre les intégrales définies plus simples, desquelles dépend l'intégrale proposée.

On a, en développant $\frac{1}{m^2+x^2}$ en série descendante,

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2} = \int dx.\cos.rx \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{m^2}{x^4} + \frac{m^4}{x^6} - \ldots \right\}$$

$$= -\frac{\cos.rx}{x} - r\int \frac{dx \sin.rx}{x}$$

$$-m^2 \left\{ \frac{-\cos.rx}{3x^3} + \frac{r.\sin.rx}{3.2.x^2} + \frac{r^2\cos.rx}{3.2.1.x} + \frac{r^3}{3.2.1} \int \frac{dx.\sin.rx}{x} \right\} \qquad (1)$$

$$+ m^4 \left\{ -\frac{\cos.rx}{5x^5} + \frac{r.\sin.rx}{5.4.x^4} + \frac{r^2\cos.rx}{5.4.3.x^3} - \frac{r^3\sin.rx}{5.4.3.2.x^2} - \frac{r^4\cos.rx}{5.4.3.2.1.x} - \frac{r^5}{5.4.3.2.1} \int \frac{dx.\sin.rx}{x} \right\}$$

$$- \ldots .$$

$$+ M;$$

Chaque ligne horizontale est l'intégrale des termes $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2}, -m^2 \int \frac{dx.\cos.rx}{x^4}$, etc.; M est la constante arbitraire qui doit rendre nulle l'intégrale avec x. Pour la déterminer développons $\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2}$ d'une autre manière. Soit $x = \frac{1}{z}$, on aura, en mettant pour $\cos.\left(\frac{r}{z}\right)$ son développement,

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2} = -\int \frac{dz \cos.\left(\frac{r}{z}\right)}{1+m^2z^2} = \int \frac{dz}{1+m^2z^2} \left(-1 + \frac{r^2}{1.2.z^2} - \frac{r^4}{1.2.3.4.z^4} + \cdots \right)$$

$$= -\frac{1}{m}.\ \text{arc. tang. } mz$$

$$-\frac{r^2}{2z} - \frac{mr^2}{2}.\ \text{arc. tang. } mz$$

$$+\frac{r^4}{3.2.3.4.z^3} - \frac{m^2r^4}{2.3.4\,z} - \frac{m^3r^4}{2.3.4.}\ \text{arc. tang. } mz$$

$$(2) \qquad -\frac{r^6}{5.2.3.4.5.6.z^5} + \frac{m^2r^6}{3.2.3.4.5.6.z^3} - \frac{m^4r^6}{2.3.4.5.6.z} - \frac{m^5r^6}{2.3.4.5.6.}\ \text{arc. tang.} mz$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$+ N;$$

en notant qu'on a

$$\frac{1}{z^2(1+m^2z^2)}=\frac{1}{z^2}-\frac{m^2}{1+m^2z^2};$$

$$\frac{1}{z^4(1+m^2z^2)}=\frac{1}{z^4}-\frac{m^2}{z^2}+\frac{m^4}{1+m^2z^2};$$

etc.

N est la constante arbitraire, qui doit rendre nulle l'intégrale, lorsque $z=\infty$. Maintenant nous remarquerons que si l'on met dans tous les termes du dernier membre de l'équation (1), au lieu des fonctions circulaires, leurs développemens en x, et qu'après cette substitution on intègre les termes affectés de l'intégrale $\int\frac{dx.\sin.rx}{x}$; on aura une fonction de puissances ascendantes et descendantes de x, qui sera identique avec la fonction correspondante de $\frac{1}{z}$, qu'on obtiendra en mettant dans le dernier membre de l'équation (2) le développement en z de l'expression arc.tang.mz. Les équations (1) et (2), transformées comme on vient de dire, n'acquerront aucun terme constant par les substitutions indiquées: les constantes M et N resteront donc les mêmes. De là il suit que la valeur de la constante M, lorsque $x=0$, est la même que la valeur de N, lorsque $z=\infty$, en vertu de la supposition $x=\frac{1}{z}$: mais lorsque $z=\infty$, l'équation (2) donne, l'intégrale en z étant nulle à cette limite,

$$N=\frac{\pi}{2m}\left(1+\frac{m^2r^2}{1.2}+\frac{m^4r^4}{1.2.3.4}+\frac{m^6r^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\right)=\frac{\pi}{2m}\left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right):$$

On aura donc

$$M=N=\frac{\pi}{2m}\left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right);$$

Lorsque $x=\infty$, l'équation (1) donne

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2}=M-\frac{1}{m}\left(mr+\frac{m^3r^3}{1.2.3.}+\frac{m^5r^5}{1.2.3.4.5.}+\ldots\right).\int\frac{dx.\sin.rx}{x}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2m}\right)-\left(\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2m}\right).\int\frac{dx.\sin.rx}{x};$$

et puisque, lorsque $x=\infty$, on a $\int\frac{dx.\sin.rx}{x}=\frac{\pi}{2}$, on aura enfin $\int\frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{2m}.e^{-mr}$.

22. On a de la même manière

$$\int\frac{xdx.\sin.rx}{m^2+x^2}=\int dx.\sin.rx\left(\frac{1}{x}-\frac{m^2}{x^3}+\frac{m^4}{x^5}-\ldots\right)$$

$$=\int\frac{dx.\sin.rx}{x}$$

$$+\frac{m^2\sin.rx}{2x^2}+\frac{m^2r.\cos.rx}{2x}+\frac{m^2r^2}{2.1}\int\frac{dx.\sin.rx}{x}$$

$$-\frac{m^4\sin.rx}{4x^4}-\frac{m^4r.\cos.rx}{4.3.x^3}+\frac{m^4r^2.\sin.rx}{4.3.2.x^2}+\frac{m^4r^3.\cos.rx}{4.3.2.1.x}+\frac{m^4r^4}{4.3.2.1.}\int\frac{dx.\sin.rx}{x}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+M;$$

Pour déterminer M dans le cas de $x=0$, soit $x=\frac{1}{z}$, on aura, en développant $\sin.\left(\frac{r}{z}\right)$,

$$\int\frac{xdx.\sin.rx}{m^2+x^2}=\int\frac{dz}{1+m^2z^2}\left(-\frac{r}{z^2}+\frac{r^3}{1.2.3.z^4}-\frac{r^5}{1.2.3.4.5.z^6}+\ldots\right)$$

$$= -r.\left\{-\frac{1}{z} - m.\text{arc. tang.}\,mz\right\}$$

$$+\frac{r^3}{1.2.3}.\left\{-\frac{1}{3z^3} + \frac{m^2}{z} + m^3\,\text{arc.tang.}\,mz\right\}$$

$$-\frac{r^5}{1.2.3.4.5}.\left\{-\frac{1}{5z^5} + \frac{m^2}{3z^3} - \frac{m^4}{z} - m^5\,\text{arc.tang.}\,mz\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ N:$$

Cette équation donne, lorsque $z = \infty$,

$$N = -\frac{\pi}{2}.\left\{mr + \frac{m^3r^3}{1.2.3} + \frac{m^5r^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right\} = \frac{\pi}{2}.\left\{\frac{e^{-mr} - e^{mr}}{2}\right\} = M.$$

Lorsque $x = \infty$, la première équation devient

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{m^2 + x^2} = M + \left\{\frac{e^{mr} + e^{-mr}}{2}\right\}.\int \frac{dx.\sin.rx}{x} = M + \left\{\frac{e^{mr} + e^{-mr}}{2}\right\}.\frac{\pi}{2};$$

donc enfin

$$\int \frac{xdx\sin.rx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2}.e^{-mr}.$$

En faisant $m = 1$, on conclut le théorème de M.r Laplace,

$$\int \frac{dx.(\cos.rx + x.\sin.rx)}{1 + x^2} = \frac{\pi}{e^r}.$$

Par le même procédé on trouve

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x(m^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\left\{1 - \frac{1}{e^{mr}}\right\}.$$

Nous avons tiré ces exemples du mémoire de M.r Laplace *sur les fonctions génératrices, les intégrales définies, etc. Paris, septembre* 1811. Pour connaître

les intégrales, qu'on déduit de $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2}$, on peut consulter ce Mémoire, ainsi que le *n.° 43 du nouveau Bulletin de la Société philomatique*, et l'ouvrage de M.r LEGENDRE intitulé *Exercices de Calcul intégral, Paris*, 1811. Nous remarquerons que cette intégrale dépend elle-même de $\int \frac{dx.\sin.rx}{x}$, et de $\int \frac{dx}{1+m^2x^2}$, ainsi qu'on a pu le voir.

Aux intégrales indiquées par ces Géomètres on peut joindre les suivantes, $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2p}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{m^2+x^2}$, $\int \frac{x\,dx.\overline{\sin.rx}^{2p+1}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{m^2+x^2}$, qui peuvent se développer, lorsque p et q sont des nombres entiers positifs, en un nombre fini de termes de la forme $\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2}$, $\int \frac{x\,dx.\sin.rx}{m^2+x^2}$. Ainsi l'on a (n.° 19) depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

lorsque $r>r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2}.\overline{\cos.r'x}^{2}}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{8m}\left\{-\frac{1}{2}e^{-2m(r+r')}+e^{-2mr'} -\frac{1}{2}e^{-2m(r-r')}-e^{-2mr}+1\right\}$;

$r=r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2}.\overline{\cos.rx}^{2}}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{16m}\left\{1-e^{-4mr}\right\}$;

$r<r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2}.\overline{\cos.r'x}^{2}}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{8m}\left\{-\frac{1}{2}e^{-2m(r+r')}+e^{-2mr'} -\frac{1}{2}e^{-2m(r'-r)}-e^{-2mr}+1\right\}$.

$$r > 2r' \ldots \int \frac{x\,dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{2}e^{-m(r+2r')}\right.$$

$$\left. + e^{-m(r-2r')} + e^{-mr}\right\};$$

$$r = 2r' \ldots \int \frac{x\,dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4}.\left\{\frac{1}{2}e^{-3mr} + e^{-mr}\right\};$$

$$r < 2r' \ldots \int \frac{x\,dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{4}\left\{-\frac{1}{2}e^{-m(r+2r')}\right.$$

$$\left. - e^{-m(2r'-r)} + e^{-mr}\right\}.$$

23. Passons à l'intégrale $\int dx.e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$ (M.r Laplace, *n.° 43 et* M.r Poisson, *n.° 50 du nouveau Bulletin de la Société philomatique*).

En développant $e^{-\frac{a^2}{x^2}}$ on a

$$\int dxe^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} = \int dxe^{-x^2}\left\{1-\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^4}{1.2.x^4}-\frac{a^6}{1.2.3.x^6}+\ldots\right\}$$

$$= \int dxe^{-x^2}$$

$$-\frac{a^2}{1}.\left\{-\frac{e^{-x^2}}{x}-2\int e^{-x^2}dx\right\}$$

$$+\frac{a^4}{1.2.}\left\{-\frac{e^{-x^2}}{3x^3}+\frac{2e^{-x^2}}{3x}+\frac{2^2}{3.1}\int e^{-x^2}dx\right\}$$

$$-\frac{a^6}{1.2.3}\left\{-\frac{e^{-x^2}}{5x^5}+\frac{2e^{-x^2}}{5.3.x^3}-\frac{2^2\,e^{-x^2}}{5.3.1.x}-\frac{2^3}{5.3.1}\int e^{-x^2}dx\right\}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ M;$

Pour déterminer M, lorsque l'intégrale est nulle avec x, soit $x=\frac{1}{z}$, on aura, en développant $e^{-\frac{1}{z^2}}$,

$$\int dx e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}=\int\frac{dz}{z^2}e^{-a^2z^2}\left\{-1+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{1.2.z^4}+\frac{1}{1.2.3.z^6}-\ldots\right\}$$

$$=-1.\left\{-\frac{e^{-a^2z^2}}{z}-2a^2\int dze^{-a^2z^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{1}.\left\{-\frac{e^{-a^2z^2}}{3z^3}+\frac{2a^2e^{-a^2z^2}}{3z}+\frac{2^2a^4}{1.3.}\int dze^{-a^2z^2}\right\}$$

$$-\frac{1}{1.2.}.\left\{-\frac{e^{-a^2z^2}}{5z^5}+\frac{2a^2e^{-a^2z^2}}{3.5z^3}-\frac{2^2a^4e^{-a^2z^2}}{1.3.5.z}-\frac{2^3a^6}{1.3.5}\int dze^{-a^2z^2}\right\}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ N;$

Cette équation donne, lorsque $z=\infty$, en notant que dans ce cas on a $\int e^{-a^2z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$,

$$N=\frac{-\sqrt{\pi}}{2}\left\{2a+\frac{2^2a^3}{3}+\frac{2^3a^5}{1.2.3.5}+\frac{2^4}{1.2.3}.\frac{a^7}{3.5.7}+\ldots\right\}=M.$$

Lorsque $x=\infty$, la première équation donne, en y mettant pour M cette valeur,

$$\int dx e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{1+\frac{2a^2}{1}+\frac{2^2}{1.2}\cdot\frac{a^4}{3}+\frac{2^3}{1.2.3}\cdot\frac{a^6}{5.3}\right.$$

$$+\frac{2^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{a^7}{7.5.3}+\ldots$$

$$\left.-2a-\frac{2^2}{1}\cdot\frac{a^3}{3}-\frac{2^3}{1.2}\cdot\frac{a^5}{5.3}-\frac{2^4}{1.2.3}\cdot\frac{a^7}{7.5.3}-\ldots\right\};$$

Multipliant le numérateur et le dénominateur de chaque terme du second membre autant de fois par 2, pour que ce nombre soit élevé à la même puissance que a, l'intégrale précédente se réduira à

$$\int dx.e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-2a}.$$

24. Soit encore $\int x^{-\frac{1}{2}}dx.e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, on aura, en développant $e^{-\frac{1}{2nx}}$,

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx.e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx.e^{-\frac{x}{2n}}\left\{1-\frac{1}{2nx}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1.2.(2nx)^2}-\frac{1}{1.2.3.(2nx)^3}+\ldots\right\}$$

$$=\int x^{-\frac{1}{2}}dx.e^{-\frac{x}{2n}}$$

$$-\frac{1}{2n}\left\{-\frac{2e^{-\frac{x}{2n}}}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{2n}\cdot\int x^{-\frac{1}{2}}dx.e^{-\frac{x}{2n}}\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2(2n)^2}\left\{-\frac{2e^{-\frac{x}{2n}}}{3x^{\frac{3}{2}}}+\frac{2^2e^{-\frac{x}{2n}}}{3.2nx^{\frac{1}{2}}}+\frac{2^2}{3.(2n)^2}\int x^{-\frac{1}{2}}dxe^{-\frac{x}{2n}}\right\}$$

$$-\frac{1}{1.2.3.(2n)^3}\left\{-\frac{2e^{-\frac{x}{2n}}}{5x^{\frac{5}{2}}}+\frac{2^2e^{-\frac{x}{2n}}}{5.3.2n.x^{\frac{3}{2}}}-\frac{2^3e^{-\frac{x}{2n}}}{5.3.1.(2n)^2x^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.-\frac{2^3}{5.3.1.(2n)^3}\int x^{-\frac{1}{2}}dxe^{-\frac{x}{2n}}\right\}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ M;$

Pour déterminer M, soit $x=\frac{1}{z}$, on aura, en développant $e^{-\frac{1}{2nz}}$,

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx.e^{-\frac{x}{2n}}.e^{-\frac{1}{2nx}}=-\int z^{-\frac{3}{2}}.e^{-\frac{1}{2nz}}.e^{-\frac{z}{2n}}dz=$$

$$\int z^{-\frac{3}{2}}.dz.e^{-\frac{z}{2n}}\left\{-1+\frac{1}{2nz}-\frac{1}{1.2.(2nz)^2}+\frac{1}{1.2.3.(2nz)^3}-\ldots\right\}$$

$$= -1\left\{ -\frac{2e^{-\frac{z}{2n}}}{z^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{2n}\int z^{-\frac{1}{2}} dze^{-\frac{z}{2n}} \right\}$$

$$+\frac{1}{2n}\left\{ -\frac{2e^{-\frac{z}{2n}}}{3z^{\frac{3}{2}}} + \frac{2^2 e^{-\frac{z}{2n}}}{3.1.2n.z^{\frac{1}{2}}} + \frac{2^2}{3.1.(2n)^2}\int e^{-\frac{1}{2}} dze^{-\frac{z}{2n}} \right\}$$

$$-\frac{1}{1.2.(2n)^2}\left\{ -\frac{2e^{-\frac{z}{2n}}}{5.z^{\frac{5}{2}}} + \frac{2^2 e^{-\frac{z}{2n}}}{5.3.2nz^{\frac{3}{2}}} - \frac{2^3 e^{-\frac{z}{2n}}}{5.3.1(2n)^2 z^{\frac{1}{2}}} - \frac{2^3}{5.3.1.(2n)^3}\int z^{-\frac{1}{2}} dze^{-\frac{z}{2n}} \right\}$$

$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$+ N$;

en faisant $z = \infty$, et observant que dans ce cas on a

$\int z^{-\frac{1}{2}} dze^{-\frac{z}{2n}} = \sqrt{2n.\pi}$, cette équation donne

$$N = -\sqrt{2n\pi}\left\{ \frac{2}{2n} + \frac{2^2}{1}\cdot\frac{1}{3.(2n)^3} + \frac{2^3}{1.2.}\cdot\frac{1}{5.3.(2n)^5} + \frac{2^4}{1.2.3.}\cdot\frac{1}{7.5.3.(2n)^7} + \dots \right\} = M.$$

Lorsque $x = \infty$, on a par la première équation, en y mettant cette valeur de M,

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx\, e^{-\left(\frac{2nx}{1+x^2}\right)} = \sqrt{2n\pi}\left\{ 1 - \frac{2}{2n} + \frac{2^2}{1.2.(2n)^2} - \frac{2^3}{1.2.3.(2n)^3} + \dots \right\}$$

$$= \sqrt{2n\pi}.\, e^{-\frac{1}{n}}.$$

Par le même procédé on trouverait la valeur de l'intégrale $\int x^{\frac{1}{2}} dx\, e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)}$, en la faisant dépendre de l'intégrale connue $\int x^{-\frac{1}{2}} dx\, e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)}$, à laquelle se reduit en général l'intégration de la différentielle $x^{\frac{2k-1}{2}} dx.\, e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)}$, k étant un nombre entier quelconque. (*Voyez l'ouvrage cité de M.*[r] LEGENDRE, *pag.* 364). Au reste on peut remarquer, que les deux intégrales $\int dx\, e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}$, $\int x^{-\frac{1}{2}} dx\, e^{-\left\{\frac{1+x^2}{2nx}\right\}}$ se reduisent l'une à l'autre par un simple changement des variables.

25. Les intégrales rapportées dans cet article, et celles qu'on en déduit par la différentiation, ou qui s'y rapportent par la décomposition du dénominateur en facteurs, dépendent visiblement des intégrales $\int \frac{dx.\sin.x}{x}$, $\int dx.\, e^{-x^2}$, $\int \frac{dx}{1+x^2}$. Les deux développemens dont nous nous sommes servis, en ramènent l'intégration aux procédés ordinaires, et mettent en évidence la formation des coëfficiens numériques qui affectent les transcendantes circulaires.

On peut appliquer ce procédé à la recherche des

valeurs d'autres intégrales définies, mais on aura en général des series, qu'il ne sera pas possible de ramener à des expressions connues en termes finis. Nous nous bornerons aux deux exemples suivans: On trouve par les développemens du n.° 21., ces intégrales, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$;

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{(m+nx)\sqrt{x}}=\frac{\pi}{\sqrt{mn}}.\cos.\frac{mr}{n}-\frac{1}{m}.\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\left\{\frac{2mr}{n}-\frac{2^2m^2r^2}{1.3.n^2}\right.$$
$$\left.-\frac{2^3.m^3.r^3}{1.3.5.n^3}+\frac{2^4.m^4.r^4}{1.3.5.7.n^4}+\ldots\right\}:$$

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{(m+nx)\sqrt{x}}=-\frac{\pi}{\sqrt{mn}}.\sin.\frac{mr}{n}+\frac{1}{m}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\left\{\frac{2mr}{n}+\frac{2^2m^2r^2}{1.3.n^2}\right.$$
$$\left.-\frac{2^3m^3r^3}{1.3.5.n^3}-\frac{2^4m^4r^4}{1.3.5.7.n^4}+\ldots\right\}:$$

où l'on voit, que les coëfficiens numériques du terme $\frac{\pi}{\sqrt{mn}}$, qui provient de la différentielle $\frac{dx}{(m+nx)\sqrt{x}}$, sont $\cos.\frac{mr}{n}$, $\sin.\frac{mr}{n}$; mais les coëfficiens qui affectent le terme $\sqrt{\frac{\pi}{2r}}$, dû à la différentielle $\frac{dx.\begin{smallmatrix}\sin.rx\\ \cos.rx\end{smallmatrix}}{\sqrt{x}}$, ne paraissent pas de nature à être exprimés en termes finis.

26. La méthode exposée au n.° 21 peut être généralisée de la manière suivante. Considérons l'intégrale $\int\frac{dx.\sin.rx}{x+m}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$; en développant $\frac{1}{x+m}$ en puissances descendantes de la variable, et intégrant, on a

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x+m} = \int dx.\sin.rx \left\{ \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} + \frac{m^2}{x^3} - \ldots \right\}$$

$$= \int \frac{dx.\sin.rx}{x}$$

$$- m. \left\{ -\frac{\sin.rx}{x} + r.\int \frac{dx.\cos.rx}{x} \right\}$$

(1) $$+ m^2. \left\{ -\frac{\sin.rx}{2x^2} - \frac{r.\cos.rx}{x} - \frac{r^2}{2.1} \int \frac{dx.\sin.rx}{x} \right\}$$

$$- m^3. \left\{ -\frac{\sin.rx}{3x^3} - \frac{r.\cos.rx}{3.2.x^2} + \frac{r^2 \sin.rx}{3.2.1.x} - \frac{r^3}{3.2.1} \int \frac{dx.\cos.rx}{x} \right\}$$

$$+ m^4. \left\{ -\frac{\sin.rx}{4x^4} - \frac{r\cos.rx}{4.3.x^3} + \frac{r^2 \sin.rx}{4.3.2.x^2} + \frac{r^3 \cos.rx}{4.3.2.1.x} + \frac{r^4}{4.3.2.1} \int \frac{dx.\sin.rx}{x} \right\}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ M;$$

M étant la constante qui doit rendre nulle l'intégrale avec x. Soit $x = \frac{1}{z}$, on aura, en développant $\sin.\frac{r}{z}$ et intégrant,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x+m} = -\int \frac{dz.\sin.\frac{r}{z}}{z+mz^2} = \int \frac{dz}{1+mz} \left\{ -\frac{r}{z^2} + \frac{r^3}{1.2.3.z^4} - \ldots \right\}$$

$$= -r \left\{ -\frac{1}{z} - m.\log.z + m.\log.(1+mz) \right\}$$

(2) $$+ \frac{r^3}{1.2.3} \left\{ -\frac{1}{3z^3} + \frac{m}{2z^2} - \frac{m^2}{z} - m^3.\log.z + m^3.\log.(1+mz) \right\}$$

$$- \frac{r^5}{1.2.3.4.5} \left\{ -\frac{1}{5z^5} + \frac{m}{4z^4} - \frac{m^2}{3z^3} + \frac{m^3}{2z^2} - \frac{m^4}{z} - m^5 \log z + m^5 \log.(1+mz) \right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ N;$$

N étant la constante qui doit rendre nulle l'intégrale, lorsque $z = \infty$.

Maintenant j'observe que si dans le dernier membre de l'équation (1) on met pour $\sin.rx$ et pour $\cos.rx$, leurs développemens en x, et qu'on intègre, après cette substitution, les termes $\int \frac{dx.\sin.rx}{x}$, $\int \frac{dx.\cos.rx}{x}$; Ce dernier membre deviendra une fonction de puissances ascendantes et descendantes de x, avec une suite de termes constans, devenus apparens en vertu de cette substitution. Pareillement si l'on développe les termes $\log.(1+mz)$ dans l'équation (2), le dernier membre de cette équation deviendra une fonction de puissances ascendantes et descendantes de z: Or ces deux fonctions de x et de z doivent être identiques; Il suit donc que les termes indépendans de x dans l'équation (1), transformée comme on vient de dire, doivent être égaux aux termes indépendans de z dans l'équation (2). On aura ainsi

$$M + mr - \frac{m^3 r^3}{1.2.3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \ldots\ldots = N;$$

mais lorsque $z = \infty$, l'équation (2) donne

$$N = \sin.mr.\log.m;$$

partant

$$M = \sin.mr.\log.m - mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots$$

Telle est donc la valeur de la constante M, pour que le dernier membre de l'équation (1) soit nul avec x. Lorsque $x=\infty$, cette équation donne, en observant que dans ce cas on a (n.° 6)

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x}=\frac{\pi}{2};\ \int\frac{dx.\cos.rx}{x}=-A-\log.r\,;$$

$$(P)\ \int\frac{dx.\sin rx}{x+m}=\frac{\pi}{2}\cdot\cos.mr+(A+\log.mr)\sin.mr$$
$$-mr+\frac{m^3 r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots$$

On trouve de la même manière, et entre les mêmes limites $x=0$, $x=\infty$,

$$(Q)\ \int\frac{dx.\cos.rx}{x+m}=\frac{\pi}{2}.\sin.mr-(A+\log.mr)\cos.mr-\frac{m^2 r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{m^4 r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$
$$-\frac{m^6 r^6}{1.2.3.4.5.6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\ldots\ldots$$

En faisant attention que l'on a

$$\frac{1}{m^2+x^2}=\frac{1}{2m\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{x-m\sqrt{-1}}-\frac{1}{2m\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{x+m\sqrt{-1}},$$

on trouve par l'équation (P) entre les limites $x=0$, $x=\infty$,

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x^2+m^2}=\frac{1}{m}\left\{mr+\frac{m^3r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{m^5r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots\right\}$$

$$-\left(\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2m}\right)\left(A+\log.mr\right);$$

et par l'équation (Q),

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2}=\frac{\pi}{2m}\sin.mr\sqrt{-1}-\frac{\cos.mr\sqrt{-1}}{2m}.\frac{\log.(-1)}{\sqrt{-1}};$$

c'est-à-dire

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2}=\frac{\pi}{2m}.e^{-mr}.$$

On trouve pareillement

$$\int\frac{xdx.\cos.rx}{x^2+m^2}=\frac{m^2r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{m^4r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots$$

$$-\left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right)\left(A+\log.mr\right).$$

27. Les intégrales précédentes peuvent être mises sous une autre forme de la manière suivante : Soit $x+m=u$, on aura

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x+m}=\cos.mr.\int\frac{du.\sin.ru}{u}-\sin.mr.\int\frac{du.\cos.ru}{u};$$

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x+m}=\cos.mr.\int\frac{du.\cos.ru}{u}+\sin.mr.\int\frac{du.\sin.ru}{u};$$

les limites relatives à la variable u sont $u=m$, $u=\infty$: En développant $\sin.ru$, $\cos.ru$, et intégrant on a

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x+m} = \cos.mr.\left\{\frac{\pi}{2} - mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3.3} - \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5.5} + ..\right\}$$

$$-\sin.mr\left\{-\text{A}-\log.mr + \frac{m^2 r^2}{1.2.2} - \frac{m^4 r^4}{1.2.3.4.4} + \frac{m^6 r^6}{1.2.3.4.5.6.6} - \ldots\right\};$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x+m} = \cos.mr.\left\{-\text{A}-\log.mr + \frac{m^2 r^2}{1.2.2} - \frac{m^4 r^4}{1.2.3.4.4} + \frac{m^6 r^6}{1.2.3.4.5.6.6} - \ldots\right\}$$

$$+\sin.mr.\left\{\frac{\pi}{2} - mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3.3} - \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5.5} + \ldots\right\};$$

en notant que lorsque $u=\infty$, on a (n.os 2 et 6)

$$ru - \frac{r^3 u^3}{1.2.3.3} + \frac{r^5 u^5}{1.2.3.4.5.5} - \ldots = \frac{\pi}{2};$$

$$\log.u - \frac{r^2 u^2}{1.2.2} + \frac{r^4 u^4}{1.2.3.4.4} - \ldots = -\text{A}-\log.r.$$

On tire de là

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2+m^2} = \left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2m}\right)\left(mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3.3} + \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5.5} + \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2m}\right)\left(\frac{m^2 r^2}{1.2.2} + \frac{m^4 r^4}{1.2.3.4.4} + \frac{m^6 r^6}{1.2.3.4.5.6.6} + \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2m}\right)\left(\text{A}+\log.mr\right);$$

$$\int \frac{xdx.\cos rx}{x^2+m^2} = \left(\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2}\right)\left(mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3.3} + \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5.5} + \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right)\left(\frac{m^2 r^2}{1.2.2} + \frac{m^4 r^4}{1.2.3.4.4} + \frac{m^6 r^6}{1.2.3.4.5.6.6} + \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right)\left(\text{A}+\log.mr\right).$$

En comparant ces diverses expressions avec leurs correspondantes dans le n.° précédent, et en écrivant r au lieu de mr, on a les équations suivantes, vraies par identité :

$$r-\frac{r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\ldots\ldots$$

$$=\sin.r.\left\{\frac{r^2}{1.2.2}-\frac{r^4}{1.2.3.4.4}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.6}\ldots\right\}$$

$$+\cos.r.\left\{r-\frac{r^3}{1.2.3.3}+\frac{r^5}{1.2.3.4.5.5}-\ldots\ldots\right\};$$

$$\frac{r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\ldots\ldots$$

$$=\sin.r.\left\{r-\frac{r^3}{1.2.3.3}+\frac{r^5}{1.2.3.4.5.5}-\ldots\ldots\right\}$$

$$-\cos.r.\left\{\frac{r^2}{1.2.2}-\frac{r^4}{1.2.3.4.4}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.6}-\ldots\right\};$$

$$r+\frac{r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots$$

$$=\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)\left\{r+\frac{r^3}{1.2.3.3}+\frac{r^5}{1.2.3.4.5.5}+\ldots\ldots\right\}$$

$$-\left(\frac{e^r-e^{-r}}{2}\right)\left\{\frac{r^2}{1.2.2}+\frac{r^4}{1.2.3.4.4}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.6}-\ldots\right\};$$

$$\frac{r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$
$$+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\ldots$$
$$=\left(\frac{e^r-e^{-r}}{2}\right)\left(r+\frac{r^3}{1.2.3.3}+\frac{r^5}{1.2.3.4.5.5}+\ldots\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)\left(\frac{r^2}{1.2.2}+\frac{r^4}{1.2.3.4.4}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.6}+\ldots\right);$$

$$r+\frac{r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\ldots\ldots$$
$$=e^r\left\{r-\frac{r^2}{1.2.2}+\frac{r^3}{1.2.3.3}-\frac{r^4}{1.2.3.4.4}+\ldots\right\}.$$

28. Si dans les équations (P) et (Q) on fait m négative, les intégrales se présentent sous forme imaginaire. Pour éviter cet inconvénient, intégrons la différentielle $\frac{dx.\sin.rx}{x-m}$ en deux parties ; premièrement depuis $x=0$ jusqu'à $x=m$; ensuite depuis $x=m$ jusqu'à $x=\infty$. Pour avoir la première partie, soit $x=\frac{1}{z}$, on aura

$$\int\frac{dx\sin.rx}{x-m}=\int\frac{dz.\sin.\frac{r}{z}}{(mz-1)z},$$

cette dernière intégrale ayant pour limites $z=\infty$, $z=\frac{1}{m}$. Développant $\sin.\frac{r}{z}$ et intégrant, on a

$$\int \frac{dz.\sin.\frac{r}{z}}{(mz-1)z} = \int \frac{dz}{mz-1} \left\{ \frac{r}{z^2} - \frac{r^3}{1.2.3.z^4} + \frac{r^5}{1.2.3.4.5.z^6} - \ldots \right\}$$

$$= r\left\{ \frac{1}{z} + m \log.\left(m - \frac{1}{z}\right) \right\}$$

$$- \frac{r^3}{1.2.3} \left\{ \frac{1}{3z^3} + \frac{m}{2z^2} + \frac{m^2}{z} + m^3 \log.\left(m - \frac{1}{z}\right) \right\}$$

$$+ \frac{r^5}{1.2.3.4.5} \left\{ \frac{1}{5z^5} + \frac{m}{4z^4} + \frac{m^2}{3z^3} + \frac{m^3}{2z^2} + \frac{m^4}{z} + m^5 \log.\left(m - \frac{1}{z}\right) \right\}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \text{Const.};$$

lorsque $z = \infty$, cette équation donne

$$\text{Const.} = -\sin.mr.\log.m;$$

On a donc depuis $z = \infty$ jusqu'à $z = \frac{1}{m}$, ou bien depuis $x = 0$ jusqu'à $x = m$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} = \sin.mr.\log.0 - \sin.mr.\log.m + mr$$

$$- \frac{m^3 r^3}{1.2.3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \ldots$$

Pour avoir la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m}$ depuis $x = m$ jusqu'à $x = \infty$, soit $x - m = u$, on aura

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} = \sin.mr.\int \frac{du.\cos.ru}{u} + \cos.mr.\int \frac{du.\sin.ru}{u};$$

les limites par rapport à u étant $u=0$, $u=\infty$, le second membre de cette équation est connu, par ce qui précède. On aura ainsi depuis $x=m$, jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} = -\left(\mathrm{A}+\log.0+\log.r\right).\sin.mr + \frac{\pi}{2}.\cos.mr.$$

En réunissant ces deux parties, il résulte entre $x=0$ et $x=\infty$,

$$(\mathrm{R}) \int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} = \frac{\pi}{2}\cdot\cos.mr - \left(\mathrm{A}+\log.mr\right).\sin.mr$$
$$+mr-\frac{m^3 r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\ldots$$

Par le même procédé, et entre les mêmes limites on trouve

$$(\mathrm{S}) \int \frac{dx.\cos.rx}{x-m} = -\frac{\pi}{2}.\sin.mr - \left(\mathrm{A}+\log.mr\right)\sin.mr$$
$$-\frac{m^2 r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{m^4 r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\ldots$$

29. En additionnant les équations (P) et (R), on a entre les limites $x=0$, $x=\infty$,

$$(1) \qquad \int \frac{x dx.\sin.rx}{x^2-m^2} = \frac{\pi}{2}.\cos.mr:$$

En soustrayant l'équation (Q) de l'équation (S), on a entre les mêmes limites,

$$(2) \qquad \int \frac{dx\,\cos.rx}{x^2-m^2} = -\frac{\pi.\sin.mr}{2m}.$$

Si pour avoir la valeur de ces intégrales, nous nous servons des équations (P) et (Q), en y changeant m en $-m$, lorsque le dénominateur $x+m$ devient $x-m$, nous aurons

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2-m^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} + \frac{1}{2}\int \frac{dx\ \sin.rx}{x+m}$$

$$= \frac{\pi}{2}.\cos.mr - \frac{\log.(-1)}{2}.\sin.mr;$$

expression qui devient, en passant des fonctions circulaires aux exponentielles,

$$(3) \qquad \int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2-m^2} = \frac{\pi}{2}.e^{-mr.\sqrt{-1}}.$$

On trouve de la même manière, par l'équation (Q),

$$(4) \qquad \int \frac{dx.\cos.rx}{x^2-m^2} = \frac{\pi}{2m\sqrt{-1}}.e^{-mr.\sqrt{-1}}.$$

Il est remarquable, que si dans les intégrales

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2}.e^{-mr},$$

$$\int \frac{dx.\cos rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2m}.e^{-mr},$$

on écrit $m\sqrt{-1}$ au lieu de m, on tombe sur les expressions (3) et (4). En mettant les intégrales $\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2+m^2}$, $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2}$ sous cette forme

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2}.\left\{\cos.mr\sqrt{-1} + \sqrt{-1}.\sin.mr\sqrt{-1}\right\};$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2m}.\left\{\cos.mr\sqrt{-1} + \sqrt{-1}.\sin.mr\sqrt{-1}\right\};$$

on voit que lorsque m devient $m\sqrt{-1}$, on ne doit prendre que la partie réelle de ces expressions.

30. Nous ferons ici quelques remarques, qui paraissent de la plus grande importance dans l'usage des valeurs des intégrales définies : c'est que ces valeurs peuvent ne pas être exactes pour certaines valeurs particulières des constantes, dont ces intégrales sont fonctions ; et que les divers procédés qu'on peut employer pour arriver à la valeur des intégrales définies, ne sont pas également propres pour donner tous les termes qui doivent former l'intégrale définie pour ces valeurs particulières des constantes.

Nous avons vu (n.° 8) que l'on a entre les limites $x=0$, $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{0} - \frac{\pi r}{2} = \infty - \frac{\pi r}{2}.$$

Si nous faisons $m=0$ dans l'intégrale

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2m} e^{-mr};$$

nous aurons

$$\int \frac{dx.\cos rx}{x^2} = \frac{\pi}{2.0} = \infty,$$

valeur qui n'est point identique avec la véritable $\frac{1}{0} - \frac{\pi r}{2}$.

Si, pour arriver à la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx\cos rx}{x^2}$ nous considérons la double intégrale $\iint 2ydye^{-x^2y^2}.\cos.rx$,

nous trouverons, en suivant le procédé de M.r LAPLACE, (*Mémoire cité au n.° 22.*)

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{0} - \frac{r\pi}{2},$$

expression qui est plus près de la véritable que celle-ci $\frac{\pi}{2.0}$; mais qui n'est pas identique avec elle.

En faisant $m=0$ dans les deux équations du n.° 21, par lesquelles nous avons trouvé la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2}$, ces équations deviennent

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = -\frac{\cos.rx}{x} - r.\int \frac{dx.\sin.rx}{x} + M;$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = -\int dz.\cos.\frac{r}{z}$$

$$= -z - \frac{r^2}{2z} + \frac{r^4}{3}.\frac{1}{2.3.4.z^3} - \frac{r^6}{5}.\frac{1}{2.3.4.5.6.z^5} + \ldots.$$

$$\ldots\ldots + N;$$

où $z = \frac{1}{x}$: Lorsque $z = \infty$, on a

$$N = z = \frac{1}{0} = M;$$

ainsi la première équation donne, lorsque $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{0} - \frac{\pi r}{2},$$

résultat qui est exact.

En faisant $m=0$ dans l'équation (n° 29)

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2-m^2} = -\frac{\pi}{2m}.\sin.mr,$$

on a

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = -\frac{r\pi}{2},$$

valeur inexacte, qui provient de la manière dont nous avons déduit la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2-m^2}$; car lorsque $m=0$, les deux équations (Q) et (S) sont identiques, et l'opération de soustraire l'une de l'autre ne peut conduire à rien : mais si l'on met dans l'équation (Q) $m+\omega$ au lieu de m, ω étant une très-petite quantité, dont on néglige les puissances supérieures à la première, on arrivera, en soustrayant l'équation (Q) de l'équation (S), à cette équation

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{(x-m)(x+m+\omega)} = \frac{1}{2m+\omega}\left\{\left(\frac{1}{m}-\frac{\pi r}{2}\right)\omega.\cos mr \right.$$

$$\left. -\pi.\sin mr - (A+\log.mr)\,\omega.r.\sin.mr \right\};$$

En y faisant $m=0$, et, après les réductions auxquelles cette valeur donne lieu, faisant aussi $\omega=0$, on aura

$$\int \frac{dx\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{m} - \frac{\pi r}{2} = \frac{1}{0} - \frac{\pi r}{2}.$$

31. A l'aide des valeurs des intégrales $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2 - m^2}$, $\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2 - m^2}$, on peut trouver celles des intégrales

$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2p}.\overline{\cos r'x}^{q}}{x^2 - m^2}$, $\int \frac{xdx.\overline{\sin.rx}^{2p+1}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{x^2 - m^2}$, p et q étant

des nombres entiers positifs (n° 22). Mais on doit observer que la première de ces intégrales peut

conduire à l'intégrale $\int \frac{dx}{x^2 - m^2}$, qui, prise à la manière ordinaire, donnerait, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, un résultat imaginaire, ce qui porterait à conclure que

l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.r}^{2p}\overline{\cos.r'x}^{q}}{x^2 - m^2}$ est imaginaire entre ces

limites, tandis qu'elle est réelle. Pour éviter cet inconvénient, on intégrera la différentielle $\frac{dx}{x^2 - m^2}$ en

deux parties, premièrement depuis $x = 0$ jusqu'à $x = m$; ensuite depuis $x = m$ jusqu'à $x = \infty$. Pour avoir la première partie, donnons à l'intégrale cette forme

$$\int \frac{dx}{x^2 - m^2} = \frac{1}{2m}.\log.\left(m - x\right) - \frac{1}{2m}\log.\left(m + x\right) + \text{Const.}$$

cette équation donne, entre les limites $x = 0$, $x = m$,

$$\int \frac{dx}{x^2 - m^2} = \frac{1}{2m}.\log.0 - \frac{1}{2m}.\log.2m.$$

Pour avoir la seconde partie mettons l'intégrale sous cette autre forme

$$\int \frac{dx}{x^2 - m^2} = \frac{1}{2m} . \log.\left(x - m\right) - \frac{1}{2m} . \log.\left(m + x\right) + \text{Const.}$$

d'où l'on tire, depuis $x = m$ jusqu'à $x = \infty$,

$$\int \frac{dx}{x^2 - m^2} = -\frac{1}{2m} \log.0 + \frac{1}{2m} . \log.2m .$$

Ainsi l'on a entre les limites $x = 0$, $x = \infty$

$$\int \frac{dx}{x^2 - m^2} = 0 .$$

D'après cela on trouvera, par exemple,

$$\int \frac{dx.\cos.\overline{r'x}^2}{x^2 - m^2} = -\frac{\pi}{4m} . \sin.2mr' ;$$

etc.

32. On a (n.° 28) entre les limites $x = m$, $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x - m} = \frac{\pi}{2} . \cos.mr - (\text{A} + \log.r + \log.0) \sin.mr ;$$

on trouve de la même manière, depuis $x = m$ jusqu'à $x = -\infty$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x - m} = -\frac{\pi}{2} . \cos.mr - (\text{A} + \log.r + \log.0) \sin.mr ;$$

d'où l'on conclut depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x - m} = \pi \cos.mr = \int \frac{dx \sin.rx}{x + m} .$$

On a pareillement entre les mêmes limites

$$\int \frac{dx \cos.rx}{x - m} = -\pi . \sin.mr = -\int \frac{dx.\cos.rx}{x + m} .$$

Le procédé du n.° 26 peut servir pour avoir le développement en série d'autres intégrales, telles que $\int \frac{dx.\sin rx}{(x+m)^2}$, $\int \frac{dx.\cos.rx}{(x+m)^2}$, etc. Nous nous bornerons ici à faire connaître l'avantage qu'il offre pour donner d'une manière plus rapide, que par les méthodes ordinaires, la valeur approchée de quelques séries divergentes.

33. On a

$$\int \frac{e^{-az}dz}{1+z^2} = \int e^{-az}dz \left\{1 - z^2 + z^4 - \ldots\right\}$$

$$= -e^{-az}.\frac{1}{a}$$

$$+ e^{-az}\left\{\frac{z^2}{a} + \frac{2z}{a^2} + \frac{2.1}{a^3}\right\}$$

$$- e^{-az}\left\{\frac{z^4}{a} + \frac{4z^3}{a^2} + \frac{4.3.z^2}{a^3} + \frac{4.3.2.z}{a^4} + \frac{4.3.2.1}{a^5}\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \text{Const.};$$

d'où l'on conclut depuis $z=0$, jusqu'à $z=\infty$,

$$\int \frac{dze^{-az}}{1+z^2} = \frac{1}{a} - \frac{1.2}{a^3} + \frac{1.2.3.4}{a^5} - \frac{1.2.3.4.5.6}{a^7} + \ldots$$

On trouve, entre les mêmes limites,

$$\int \frac{zdze^{-az}}{1+z^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1.2.3}{a^4} + \frac{1.2.3.4.5}{a^6} - \ldots$$

Pour avoir la valeur approchée de ces suites, intégrons de la manière suivante :

$$\int \frac{dze^{-az}}{1+z^2} = \int dze^{-az} \left\{ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \ldots \right\}$$

$$= -\frac{e^{-az}}{z} - a\int \frac{dze^{-az}}{z}$$

$$(1) \qquad + \frac{e^{-az}}{3z^3} - \frac{ae^{-az}}{3.2.z^2} + \frac{a^2\, e^{-az}}{3.2.1.z} + \frac{a^3}{3.2.1}\int \frac{dze^{-az}}{z}$$

$$- \frac{e^{-az}}{5z^5} + \frac{ae^{-az}}{5.4.z^4} - \frac{a^2\, e^{-az}}{5.4.3.z^3} + \frac{a^3\, e^{-az}}{5.4.3.2.z^2} - \frac{a^4\, e^{-az}}{5.4.3.2.1.z}$$

$$- \frac{a^5}{5.4.3.2.1}\int \frac{dze^{-az}}{z}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ M;$$

M étant la constante qui doit rendre nulle l'intégrale avec z. Pour la déterminer, faisons $z = \frac{1}{x}$, et développons $e^{-\frac{a}{x}}$, nous aurons

$$\int \frac{e^{-az}\, dz}{1+z^2} = -\int \frac{e^{-\frac{a}{x}}\, dx}{1+x^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}\left\{-1 + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{1.2.x^2} + \ldots\right\},$$

$$= -\,\text{arc.tang.}\, x$$

$$+ \; a \left\{ \log.x - \frac{1}{2}\log.(1+x^2) \right\}$$

$$(2) \qquad - \frac{a^2}{1.2}\left\{ -\frac{1}{x} - \text{arc.tang.}\, x \right\}$$

$$+ \frac{a^3}{1.2.3}\left\{ -\frac{1}{2x^2} - \log.x + \frac{1}{2}\log.(1+x^2) \right\}$$

$$-\frac{a^4}{1.2.3.4}\left\{-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\text{arc.tang.}x\right\}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ N;$

N étant la constante qui doit rendre nulle l'intégrale, lorsque $x=\infty$. Les termes indépendans de z dans l'équation (1) sont

$$M+a-\frac{a^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$+\frac{a^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\ldots\ldots$$

Les termes indépendans de x dans l'équation (2) sont N. On aura donc (n.° 26)

$$M=N-a+\frac{a^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$-\frac{a^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots$$

Lorsque $x=\infty$, l'équation (2) donne

$$N=\frac{\pi}{2}.\cos.a;$$

partant

$$M=\frac{\pi}{2}.\cos.a-a+\frac{a^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$-\frac{a^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots$$

c'est la valeur de la constante M pour que le dernier membre de l'équation (1) soit nul avec z : lorsque $z=\infty$, cette équation donne, en notant que l'on a dans ce cas (n.° 20) $\int\frac{e^{-az}dz}{z}=-A-\log.a$,

$$\int \frac{dz e^{-az}}{1+z^2} = (A + \log a)\sin. a + \frac{\pi}{2}\cos. a$$

$$- a + \frac{a^3}{1.2.3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$- \frac{a^5}{1.2.3.4.5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots.$$

expression qui peut être mise sous cette forme (n.° 27)

$$\int \frac{dz e^{-az}}{1+z^2} = (A + \log. a)\sin. a + \frac{\pi}{2} . \cos. a$$

$$- \sin. a . \left\{\frac{a^2}{1.2.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4.4} + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6.6} - \ldots.\right\}$$

$$- \cos. a . \left\{a - \frac{a^3}{1.2.3.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5.5} - \ldots\ldots\right\}.$$

On aura de la même manière

$$\int \frac{z dz e^{-az}}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} . \sin. a - (A + \log. a)\sin. a$$

$$+ \cos. a\left\{\frac{a^2}{1.2.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4.4} + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6.6} - \ldots..\right\}$$

$$- \sin. a\left\{a - \frac{a^3}{1.2.3.3} + \frac{a^3}{1.2.3.4.5.5} - \ldots\ldots.\right\}.$$

Soit $a = 1 =$ au rayon R du cercle, on aura

$$1 - 1.2 + 1.2.3.4 - 1.2.3.4.5.6 + \ldots..$$

$$= \frac{\pi}{2} . \cos. R + A . \sin. R$$

$$- \sin. R\left\{\frac{1}{1.2.2} - \frac{1}{1.2.3.4.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6} - \ldots\right\}$$

$$- \cos. R\left\{1 - \frac{1}{1.2.3.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5.5} - \ldots\ldots\right\};$$

$$1 - 1.2.3 + 1.2.3.4.5 - 1.2.3.4.5.6.7 + \ldots\ldots$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \sin.R - \text{A}.\sin.R$$
$$+ \cos.R \cdot \left\{ \frac{1}{1.2.2} - \frac{1}{1.2.3.4.4} + \frac{1}{1.2.34.5.6.6} - \ldots \right\}$$
$$- \sin.R \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{1.2.3.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5.5} - \ldots\ldots\ldots \right\}.$$

En poussant l'aproximation jusqu'au douzième cifre décimal significatif, on trouve pour les limites des séries précédentes

$$1 - 1.2 + 1.2.3.4 - 1.2.3.4.5.6 + \ldots = 0{,}621\,449\,624\,236,$$
$$1 - 1.2.3 + 1.2.3.4.5 - 1.2.3.4.5.6.7 + \ldots = 0{,}343\,279\,002\,556;$$

en rapportant ici la valeur connue de la suite

$$1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 - \ldots = 0{,}403\,652\,637\,676\ldots\ldots$$

(*Calcul intégral de* Mr LACROIX, *Tom.* 3, *pag.* 481) on aura les limites de trois suites divergentes, remarquables par l'analogie qu'elles ont avec les développemens du cosinus, du sinus et de l'exponentielle e^{-x}.

ARTICLE TROISIÈME

34. Nous allons présenter dans cet article quelques exemples d'intégrales définies dont on obtient la valeur par un seul développement, en arrêtant l'intégration de chaque terme, dès qu'on arrive à une intégrale définie connue. C'est ainsi que M.r LAPLACE a intégré la différentielle $e^{-x^2}.dx.\cos.rx$ en développant $\cos.rx$, et arrêtant l'intégration de chaque terme à $\int dx e^{-x^2}$; Il a trouvé par là, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int dxe^{-x^2}.\cos.rx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Développant $\sin.rx$, et intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, on trouve également

$$\int e^{-x^2} dx.\sin.rx = \frac{1}{2}\left\{ r - \frac{r^3}{2.3} + \frac{r^5}{3.4.5} - \frac{r^7}{4.5.6.7} + \ldots \right\};$$

(*Voyez l'Ouvrage cité de* M.r LEGENDRE, *pag.* 363.)

On a pareillement

$$\int \frac{dx.e^{-ax}.\sin.rx}{x} = \int dx.e^{-ax}\left(r - \frac{r^3 x^2}{1.2.3} + \frac{r^5 x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots \right)$$

$$= -\frac{r}{a}.e^{-ax}$$

$$-\frac{r^3}{1.2.3}.e^{-ax}\left(-\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} - \frac{2.1}{a^3} \right)$$

$$+\frac{r^5}{1.2.3.4.5}\,e^{-ax}\left(-\frac{x^4}{a}-\frac{4x^3}{a^2}-\frac{4.3.x^2}{a^3}-\frac{4.3.2.x}{a^4}-\frac{4.3.2.1}{a^5}\right)$$

$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\,M\,;$$

ce qui donne, depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\int\frac{dxe^{-ax}.\sin.rx}{x}=\text{arc. tang.}\frac{r}{a}.$$

On aura ainsi, par ce qui précède, la valeur des intégrales

$$\int dxe^{-x^2}\,\overline{\sin.rx}^{\,2p}\,.\overline{\cos.r'x}^{\,q},\quad\int\frac{dxe^{-ax}.\overline{\sin.rx}^{\,2p+1}\,.\overline{\cos.r'x}^{\,q}}{x},$$

p et q étant des nombres entiers positifs (n.° 19), et les limites des intégrales étant zéro et infini.

35. Soit l'intégrale $\int\frac{dxe^{-ax}.\cos.rx}{x}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, on aura

$$\int\frac{dxe^{-ax}.\cos.rx}{x}=\int dxe^{-ax}\left(\frac{1}{x}-\frac{r^2.x}{1.2}+\frac{r^4\,x^3}{1.2.3.4}-\ldots\right)$$

$$=\log.x-ax+\frac{a^2\,x^2}{1.2.2}-\frac{a^3\,x^3}{1.2.3.3}+\frac{a^4\,x^4}{1.2.3.4.4}-\ldots$$

$$-\frac{r^2}{1.2}\left\{-\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right\}.e^{-ax}$$

$$+\frac{r^4}{1.2.3.4}.\left\{-\frac{x^3}{a}-\frac{3x^2}{a^2}-\frac{3.2.x}{a^3}-\frac{3.2.1}{a^4}\right\}.e^{-ax}$$

$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\,\text{Const.};$$

lorsque $x=0$, on a Const. $= -\log.0 - \frac{1}{2}\log.\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)$;

par conséquent on a depuis x nul jusqu'à x infini

$$\int \frac{dxe^{-ax}.\cos.rx}{x} = -\log.0 - \frac{1}{2}\log.(a^2+r^2) - \mathrm{A},$$

en observant que l'on a, lorsque $x=\infty$, (n.° 20),

$$\log.x - ax + \frac{a^2x^2}{1.2.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3.3} + \ldots = -\mathrm{A} - \log.a,$$

A désignant le nombre 0, 577 215 .....

On voit par cette valeur l'ordre d'infini que prend l'intégrale proposée. On a également depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.e^{-a'x}\cos.r'x}{x} = -\log.0 - \frac{1}{2}\log.(a'^2+r'^2) - \mathrm{A};$$

on aura donc entre ces limites

$$\int \frac{dx(e^{-a'x}\cos.r'x - e^{-ax}.\cos.rx)}{x} = \frac{1}{2}\log.\left(\frac{a^2+r^2}{a'^2+r'^2}\right).$$

De la valeur de l'intégrale $\int \frac{dxe^{-ax}.\cos.rx}{x}$ dépend celle de $\int \frac{dxe^{-ax}.\overline{\sin.rx}^{2p}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{x}$, p et q étant des nombres entiers positifs. On trouve ainsi, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, (n.° 19)

$$\int \frac{dx.e^{-ax}.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{1}{8}\log.\left\{\frac{(a^2+4r^2)\sqrt{a^2+4(r+r')^2}\,.\,\sqrt{a^2+4(r-r')^2}}{a^2(a^2+4r'^2)}\right\}.$$

On a encore

$$\int \frac{dxe^{-ax}.\cos.rx}{x^2} = -\frac{e^{-ax}.\cos.rx}{x} - a\int \frac{e^{-ax}dx.\cos.rx}{x} - r\int \frac{dx.e^{-ax}\sin.rx}{x};$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}.\sin rx}{x^2} = -\frac{e^{-ax}\sin.rx}{x} - a\int \frac{dx.e^{-ax}.\sin.rx}{x} + r\int \frac{dx.e^{-ax}\cos.rx}{x};$$

d'où l'on tire depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$,

$$\int \frac{dxe.^{-ax}\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{0} + a\left\{ A + \frac{1}{2}\log.(a^2 + r^2) + \log.0 \right\} - r.\text{arc. tang.}\frac{r}{a}:$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}\sin.rx}{x^2} = r - a.\text{ arc. tang. }\frac{r}{a} - r\left\{ A + \frac{1}{2}\log.(a^2 + r^2) + \log.0 \right\}:$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}(\cos r'x - \cos.rx)}{x^2} = \frac{a}{2}.\log.\left(\frac{a^2 + r'^2}{a^2 + r^2}\right) + r.\text{ arc. tang. }\frac{r}{a}$$

$$- r'.\text{ arc. tang. }\frac{r'}{a}:$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.(e^{-a'x} - e^{-ax})}{x^2} = \frac{r}{2}.\log.\left\{\frac{a^2 + r^2}{a'^2 + r^2}\right\} + a.\text{ arc. tang. }\frac{r}{a}$$

$$- a'.\text{ arc.tang.}\frac{r}{a'}.$$

36. Soit l'intégrale $\int \frac{(x^n - 1)}{\log.x}.dx$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; posons $\log.x = -u$, nous aurons

$$\int \frac{(x^n - 1)\,dx}{\log.x} = \int \left(\frac{e^{-nu} - 1}{u}\right).e^{-u}.du;$$

cette dernière intégrale ayant pour limites $u = \infty$, $u = 0$. Développant $\frac{e^{-nu} - 1}{u}$, on a

$$\int \frac{(e^{-nu} - 1)\,e^{-u}}{u}du = \int e^{-u}du\left\{ -n + \frac{n^2u}{2} - \frac{n^3u^2}{1.2.3} + \ldots \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= - n \quad . \left\{ - e^{-u} \right\} \\
&+ \frac{n^2}{1.2} \quad . \left\{ - u - 1 \right\} . e^{-u} \\
&- \frac{n^3}{1.2.3} . \left\{ - u^2 - 2u - 2.1 \right\} e^{-u} \\
&+ \frac{n^4}{1.2.3.4} . \left\{ - u^3 - 3u^2 - 3.2.u - 3.2.1 \right\} e^{-u} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \text{Const.}
\end{aligned}
$$

Lorsque $u = \infty$, la constante est nulle; on a donc depuis $u = \infty$ jusqu'à $u = 0$

$$\int \frac{(e^{-nu} - 1)\, e^{-u}}{u} . du = n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} + \ldots = \log.(1+n)$$

$$= \int \frac{x^n - 1}{\log.x} . dx .$$

Voyez *l'Ouvrage de* M.r LEGENDRE, *pag.* 370, pour les intégrales qui dépendent de celle-ci. Puisqu'on a

$$\int \frac{x^n - 1}{\log.x} dx = \log.(1+n) ; \int \frac{x^m - 1}{\log.x} dx = \log.(1+m) ,$$

on aura en soustrayant la première intégrale de la seconde

$$\int \left(\frac{x^m - x^n}{\log.x} \right) . dx = \log. \left(\frac{1+m}{1+n} \right) ,$$

résultat trouvé par EULER, et duquel il a tiré de nombreuses conséquences. (*Mémoires de Pétersbourg pour l'an* 1775). Nous remarquerons que la valeur

de cette intégrale définie combine avec l'intégrale du n.° 20

$$\int \frac{dx(e^{-a'x} - e^{-ax})}{x} = \log.a - \log.a'.$$

On trouve dans les mêmes limites $x = 0$, $x = 1$,

$$\int \frac{dx.(x^n - 1)}{(\log.x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+n}} - 1 \right\};$$

$$\int \frac{(x^m - x^n)dx}{(\log.x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{m+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right\};$$

$$\int \frac{dx.(x^x - 1)}{\log.x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.4^3} - \frac{1}{4.5^4} + \frac{1}{5.6^5} - \ldots$$

37. Considérons encore l'intégrale $\int \frac{dx.(\log.x)^n}{1+x^2}$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, n étant un nombre entier positif. Soit $n = 1$, et intégrons la différentielle proposée depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \infty$; nous aurons

$$\int \frac{dx.\log.x}{1+x^2} = \int dx.\log.x \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \ldots \right\}$$

$$= -\frac{\log.x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$- \left\{ -\frac{\log.x}{3x^3} - \frac{1}{3^2.x^3} \right\}$$

$$+ \left\{ -\frac{\log.x}{5x^5} - \frac{1}{5^2.x^5} \right\}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \text{Const.}$$

Cette équation donne entre les limites $x=1$, $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\log.x}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Pour intégrer la même différentielle depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, soit $x=\frac{1}{z}$, on aura

$$\int \frac{dx\,\log.x}{1+x^2} = \int \frac{dz.\log.z}{1+z^2};$$

l'intégrale relative à z ayant pour limites $z=\infty$, $z=1$. Or on a dans ces limites

$$\int \frac{dz.\log z}{1+z^2} = -1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \ldots$$

on a donc, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\log.x}{1+x^2} = 0,$$

valeur nulle par identité.

On trouve de la même manière

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^2}{1+x^2} = 2\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots\right) \quad \begin{pmatrix} x=1 \\ x=\infty \end{pmatrix}$$

$$\int \frac{dx\,\overline{\log.x}^2}{1+x^2} = 2\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots\right) \quad \begin{pmatrix} x=0 \\ x=1 \end{pmatrix}$$

d'où il résulte, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^2}{1+x^2} = 4\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots\right).$$

En général, puisqu'on a

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^n}{1+x^2} = \int dx.\overline{\log.x}^n \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \ldots\right)$$

$$= -\frac{1}{x}\left(\overline{\log.x}^n + n.\,\overline{\log.x}^{n-1} + n(n-1)\overline{\log.x}^{n-2} \ldots + n(n-1)\ldots 3.2.1\right)$$

$$+ \frac{1}{x^3}\left(\frac{\overline{\log.x}^n}{3} + \frac{n.\overline{\log.x}^{n-1}}{3^2} + \frac{n(n-1).\overline{\log.x}^{n-2}}{3^3} \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{3^{n+1}}\right)$$

$$- \frac{1}{x^5}\left(\frac{\overline{\log.x}^n}{5} + \frac{n.\overline{\log.x}^{n-1}}{5^2} + \frac{n(n-1)\overline{\log.x}^{n-2}}{5^3} \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{5^{n+1}}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \text{Const.};$$

on en conclura, depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^n}{1+x^2} = 1.2.3\ldots n\left\{1 - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{7^{n+1}} + \ldots\right\}.$$

Faisant ensuite $x = \frac{1}{z}$, et intégrant depuis $z=\infty$ jusqu'à $z=1$, on aura entre les limites $x=0$, $x=1$,

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^n}{1+x^2} = (-1)^n.\ 1.2.3\ldots n\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{7^{n+1}} + \ldots\right);$$

d'où l'on voit que lorsque n est impaire, on a depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^n}{1+x^2} = 0;$$

intégrale nulle par identité. Lorsque n est paire, on a dans les mêmes limites

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^n}{1+x^2} = 2.1.2.3\ldots n.\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{7^{n+1}} + \ldots\right).$$

Si l'on avait $\int \frac{dx.\overline{\log.x}^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}$ prise depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$, on aurait, en faisant $\log.x = u^2$,

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^{\frac{1}{2}}}{1+x^2} = 2\int u^2 du\, e^{u^2}\left(\frac{1}{e^{2u^2}} - \frac{1}{e^{4u^2}} + \frac{1}{e^{6u^2}} - \ldots\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{1}{7\sqrt{7}} + \ldots\right);$$

l'intégrale par rapport à u ayant pour limites $u=0$, $u=\infty$. On a également depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.(\log.x)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} = \sqrt{\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots\right)$$

$$= \int \frac{dx.\overline{\log.\frac{1}{x}}^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2};$$

cette dernière intégrale ayant pour limites zéro et l'unité.

38. Passons à présent à l'intégrale $\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x^n}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, n étant < 2. Il est clair que cette intégrale est nulle avec x sans constante arbitraire. Or on a

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x^n} = -\frac{\log.(\cos.rx)}{rx^n} - \frac{n}{r}\int \frac{dx.\log.(\cos.rx)}{x^{n+1}};$$

on a aussi

$$\log.(\cos.rx) = -\log.2 + \cos.2rx - \frac{1}{2}\cos.4rx$$
$$+ \frac{1}{3}\cos.6rx - \frac{1}{4}\cos.8rx + \ldots.$$

partant

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x^n} = -\frac{\log.(2\cos.rx)}{rx^n} - \frac{n}{r}\int \frac{dx}{x^{n+1}}\Big(\cos.2rx - \frac{1}{2}\cos.4rx$$
$$+ \frac{1}{3}\cos.6rx - \frac{1}{4}\cos.8rx + \ldots\Big);$$

ainsi l'intégrale proposée est ramenée à celles du n.° 8. Soit $n = 1$, on aura, en développant les termes $\int \frac{dx.\cos.2rx}{x^2}$, $\int \frac{dx.\cos.4rx}{x^2}$, etc.

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x^n} = -\frac{\log.(2\cos.rx)}{rx} + \frac{\cos.2rx}{rx} + 2\int \frac{dx.\sin.2rx}{x}$$
$$- \frac{\cos.4rx}{2rx} - 2\int \frac{dx.\sin.4rx}{x}$$
$$+ \frac{\cos.6rx}{3rx} + 2\int \frac{dx.\sin.6rx}{x}$$
$$- \frac{\cos.8rx}{4rx} - 2\int \frac{dx.\sin.8rx}{x}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par le raisonnement fait déjà plusieurs fois, on prouvera que le second membre de cette équation sera nul avec x. On a donc, lorsque $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\text{tang}\,rx}{x} = \pi\Big\{1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots\Big\} = \frac{\pi}{2};$$

on a ainsi ce résultat remarquable

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x} = \frac{\pi}{2} = \int \frac{dx.\sin.rx}{x}.$$

On peut parvenir très-facilement à ce résultat, en observant que l'on a

$$\text{tang}.rx = 2.(\sin.2rx - \sin.4rx + \sin.6rx - \sin.8rx + \ldots).$$

On trouve pareillement

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \ldots \right\};$$

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x\sqrt{x}} = 4.\sqrt{\pi r}.\left\{ 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \ldots \right\}.$$

En général puisqu'on a

$$\log.(\sin.rx) = -\log.2 - \cos.2rx - \frac{1}{2}\cos.4rx - \frac{1}{3}\cos.6rx - \ldots\ldots$$

$$\log.(\text{tang}.rx) = -2\left\{ \cos.2rx + \frac{1}{3}\cos.6rx + \frac{1}{5}\cos.10rx + \frac{1}{7}\cos.14rx + \ldots \right\};$$

on trouvera depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$,

$$(A) \int dx e^{-x^2}.\log.\cos.rx = -\frac{\sqrt{\pi}.\log.2}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\left(e^{-r^2} - \frac{e^{-4r^2}}{2} + \frac{e^{-9r^2}}{3} - \frac{e^{-16r^2}}{4} + \ldots \right);$$

$$\int dx e^{-x^2}.\log.\text{tang}.rx = -\sqrt{\pi}.\left(e^{-r^2} + \frac{e^{-9r^2}}{3} \right.$$

$$+\frac{e^{-25r^2}}{5}+\frac{e^{-49r^2}}{7}+\ldots\Big);$$

$$\int dxe^{-x^2}.\log.\sin.rx=-\frac{\sqrt{\pi}.\log.2}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\Big(e^{-r^2}+\frac{e^{-4r^2}}{2}$$

$$+\frac{e^{-9r^2}}{3}+\frac{e^{-16r^2}}{4}+\ldots\Big).$$

En différentiant ces équations par rapport à r, on aura les valeurs des intégrales $\int xdx\,e^{-x^2}.\text{tang}.rx$, $\int xdx\,e^{-x^2}.\text{cosec}.rx$, $\int xdx\,e^{-x^2}.\cot.rx$; exprimées par des suites qui seront en général très-convergentes.

39. Nous terminerons par une classe d'intégrales qui se présentent sous forme finie. M.r Laplace a trouvé depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2e^r};$$

on aura donc entre ces limites, en substituant les expressions de $\log.\cos.r$, $\log.\text{tang}.rx$, $\log.\sin.r$, rapportées dans le n.° précédent,

$$\int\frac{dx.\log.(\cos.rx)}{1+x^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}\Big(-\log.2+\cos.2rx-\frac{1}{2}\cos.4rx$$

$$+\frac{1}{3}\cos.6rx-\frac{1}{4}\cos.8rx+\ldots\Big)$$

$$= -\frac{\pi.\log.2}{2} + \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{e^{2r}} - \frac{1}{2e^{4r}} + \frac{1}{3e^{6r}} - \frac{1}{4e^{8r}} + \ldots\right\};$$

expression qu'on peut mettre sous cette forme

$$(1)\int\frac{dx.\log.(\cos rx)}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.\log.\left\{\frac{e^{2r}+1}{2e^{2r}}\right\};$$

on aura semblablement

$$(2)\int\frac{dx.\log.(\text{tang}.rx)}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.\log.\left\{\frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1}\right\};$$

$$(3)\int\frac{dx.\log.(\sin.rx)}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.\log.\left(\frac{e^{2r}-1}{2e^{2r}}\right).$$

Différentiant l'équation (1) par rapport à r, et écrivant ensuite $\frac{x}{m}$ et mr, au lieu de x et de r, on aura

$$(4)\int\frac{xdx.\text{tang}.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{2mr}+1};$$

si $m=0$, on retombe sur l'intégrale

$$\int\frac{dx.\text{tang}.rx}{x} = \frac{\pi}{2};$$

on tirera de même des équations (2) et (3)

$$(5)\int\frac{xdx.\text{coséc}.2rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi.\,e^{2mr}}{e^{4mr}-1};$$

$$(6)\int\frac{xdx.\cot.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{2mr}-1}.$$

On parvient immédiatement aux valeurs (4), (5) et (6) en observant que l'on a

$$\text{tang}.rx = 2.\left(\sin.2rx - \sin.4rx + \sin.6rx - \sin.8rx + \ldots\right);$$

$$\text{coséc}.rx = 2 \,.\left(\sin.rx + \sin.3rx + \sin.5rx + \sin.7rx + \ldots\right);$$

$$\cot.rx \;= 2 \,.\left(\sin.2rx + \sin.4rx + \sin.6rx + \sin.8rx + \ldots\right).$$

On peut tirer des équations (4), (5) et (6) une suite d'intégrales analogues à celles qu'on déduit de l'intégrale $\int \frac{x dx.\sin.rx}{m^2 + x^2}$.

De l'équation (2) du n.° 29 on déduira entre les limites $x = 0$, $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\log.2\cos.rx}{x^2 - m^2} = -\frac{\pi}{2m} \,.\left(\sin.2mr - \frac{1}{2}.\sin.4mr + \frac{1}{3}.\sin.6mr - \frac{1}{4}.\sin.8mr + \ldots\ldots\right);$$

$$\int \frac{dx.\log.\text{tang}.rx}{x^2 - m^2} = \frac{\pi}{m} \,.\left(\sin.2mr + \frac{1}{3}.\sin.6mr + \frac{1}{5}.\sin.10mr + \frac{1}{7}.\sin.14mr + \ldots\ldots\right);$$

$$\int \frac{dx.\log.2\sin.rx}{x^2 - m^2} = \frac{\pi}{2m} \,.\left(\sin.2mr + \frac{1}{2}\sin.4mr + \frac{1}{3}\sin.6mr + \frac{1}{4}\sin.8mr + \ldots\ldots\right).$$

Substituant dans les seconds membres de ces équations au lieu des sinus leurs expressions en exponentielles, reduisant et mettant pour $\frac{\log(-1)}{\sqrt{-1}}$ sa première valeur π, il viendra

$$\int \frac{dx.\log.2\cos.rx}{x^2 - m^2} = -\frac{\pi r}{2};$$

$$\int \frac{dx.\log.\text{tang}.rx}{x^2 - m^2} = \frac{\pi^2}{4m};$$

$$\int \frac{dx.\log.2\sin rx}{x^2 - m^2} = \frac{\pi^2}{4m} - \frac{\pi r}{2}.$$

Faisant $r = 0$ dans la première de ces équations, on a $\int \frac{dx}{x^2 - m^2} = 0$, (n.° 31); partant les valeurs des intégrales $\int \frac{dx.\log.\cos.rx}{x^2 - m^2}$, $\int \frac{dx.\log.\sin.rx}{x^2 - m^2}$, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, sont les mêmes que celles des intégrales $\int \frac{dx.\log.2\cos.rx}{x^2 - m^2}$, $\int \frac{dx.\log.2.\sin.rx}{x^2 - m^2}$, prises entre les mêmes limites.

Pareillement l'équation (1) du n.° 29 donnera entre les limites $x = 0$, $x = \infty$,

$$\int \frac{xdx.\text{tang}.rx}{x^2 - m^2} = \pi.\left(\cos.2mr - \cos.4mr + \cos.6mr - \ldots\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$\int \frac{xdx.\text{cosèc}.rx}{x^2 - m^2} = \pi.\left(\cos.mr + \cos.3mr + \cos.5mr + \ldots\right) = 0;$$

$$\int \frac{xdx.\cot.rx}{x^2 - m^2} = \pi.\left(\cos.2mr + \cos.4mr + \cos.6mr + \ldots\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

TABLEAU

Des valeurs des intégrales définies les plus remarquables contenues dans ce Mémoire.

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}.$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi r}.$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2} = r.(1 - A - \log.r - \log.0) = \infty.\ (*)$$

$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^n}$ { Lorsque $n < 2$, voyez l'équation (A) du n.° 1. Si $n > 2$, voyez le n.° 7.

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}.$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x} = -A - \log.r - \log.0 = \infty.$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{0} - \frac{\pi.r}{2} = \infty.$$

LIMITES des intégrales.

$x = 0$,

$x = \infty$.

(*) La lettre A représente le nombre 0,577 215... (n.° 5).

$$\int \frac{dx\,(\cos.r'x - \cos.rx)}{x} = \log.r - \log.r'.$$

$$\int \frac{dx.(\cos.r'x - \cos.rx)}{x^2} = \frac{\pi}{2}.(r - r').$$

$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^n}$ { Lorsque $n < 1$, voyez l'équation (B) du n.° 3. Si $n > 1$, voyez le n.° 8.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{\infty} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} = \infty.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{\sqrt{x}} = \frac{3}{4}\sqrt{\infty} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2r}} = \infty.$$

etc.

$$\int \frac{dx.(\overline{\sin.r'x}^2 - \overline{\sin.rx}^2)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}.\left\{\sqrt{\frac{\pi}{r}} - \sqrt{\frac{\pi}{r'}}\right\}.$$

$$\int \frac{dx.(\overline{\sin.r'x}^4 - \overline{\sin.rx}^4)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{r}} - \sqrt{\frac{\pi}{r'}}\right\}$$

$$- \frac{1}{16}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2r}} - \sqrt{\frac{\pi}{2r'}}\right\}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x} = \frac{1}{2}\log.\infty + \frac{1}{2}\left\{A + \log.2r\right\} = \infty.$$

$$\int \frac{dx.(\overline{\sin.rx}^2 - \overline{\sin.r'x}^2)}{x} = \frac{1}{2}\log.r - \frac{1}{2}\log.r'.$$

⋮

LIMITES des intégrales.

$x = 0$,

$x = \infty$.

$$\int \frac{dx\,(\overline{\sin.rx}^{2q} - \overline{\sin.r'x}^{2q})}{x} = \frac{1}{2^{2q-1}} \cdot \left\{ \frac{2q(2q-1)\ldots q}{1.\ 2.\ .\ .(q+1)} \right.$$

$$\left. - \frac{2q(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\ 2.\ .\ .\ .\ .(q+2)} + \ldots \mp 2q \pm 1 \right\} . \log. \frac{r}{r'} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x^2} = \frac{\pi.r}{2} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^2} = \frac{\pi.r}{4} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^4} = \frac{\pi.r^3}{3} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{x^2} = \frac{3.\pi.r}{16} .$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^3} = r^3 \log.2.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{x^3} = \frac{r^2}{16} . \left\{ 24.\log.2 - 9.\log.3 \right\} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{x^5} = \frac{r^4}{16} . \left\{ 27.\log.3 - 32.\log.2 \right\} .$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\pi r}.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{4r}{3} . \sqrt{\pi r}.$$

LIMITES

des intégrales.

$x = 0,$

$x = \infty .$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x\sqrt{x}} = \left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}\right).\sqrt{\pi r}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x^2} = \frac{3r}{4}.\log.2.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x^2} = \frac{r}{16}.\left\{15.\log.3-5.\log.5\right\}.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x^4} = \frac{r^3}{6.16}.\left\{5^3.\log.5-5.3^3.\log.3\right\}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x^3} = \frac{3\pi.r^2}{8}.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x} = \frac{3\pi}{16}.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x^3} = \frac{5\pi.r^2}{32}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{\sqrt{x}} = \left\{\frac{3\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}\right\}.\sqrt{\frac{\pi}{2r}}$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x\sqrt{x}} = \left\{\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right\}.\sqrt{2\pi r}.$$

LIMITES des intégrales.

$x=0$,

$x=\infty$.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x^2\sqrt{x}} = \frac{r.(\sqrt{3}-1)}{2}.\sqrt{2\pi r}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^m}{x^n}$$ m étant un nombre entier positif, et n un nombre entier ou fractionnaire, voyez les n.os 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 18.

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{\infty} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} = \infty.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^4}{\sqrt{x}} = \frac{3}{4}\sqrt{\infty} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2r}} = \infty.$$

etc.

LIMITES des intégrales.

$x=0$,

$x=\infty$.

$$\int \frac{dx.(\overline{\cos.rx}^2 - \overline{\cos.r'x}^2)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\pi}{r}} - \sqrt{\frac{\pi}{r'}}\right).$$

$$\int \frac{dx.(\overline{\cos.rx}^4 - \overline{\cos.r'x}^4)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}.\left\{\sqrt{\frac{\pi}{r}} - \sqrt{\frac{\pi}{r'}}\right\} + \frac{1}{16}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2r}} - \sqrt{\frac{\pi}{2r'}}\right\}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.(\overline{\cos.rx}^2 - \overline{\sin.r'x}^2)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r'}};$$

$$\int \frac{dx.(\overline{\cos.rx}^4 - \overline{\sin.r'x}^4)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r'}} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2r}} - \frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2r'}}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^3}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \cdot \left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2r}} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^5}{\sqrt{x}} = \frac{1}{16} \cdot \left(10 + \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2r}} .$$

etc.

$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^m}{x^n}$ { m étant un nombre entier positif, et n un nombre entier ou fractionnaire, voyez les n.os 17 et 18.

$$r > r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{x} = \frac{\pi}{2} .$$

$$r = r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\cos.rx}{x} = \frac{\pi}{4} .$$

$$r < r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{x} = 0 .$$

$$r > r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{\pi}{2} .$$

$$r = 2r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{3\pi}{8} .$$

$$r < 2r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{\pi}{4} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2 \cdot \overline{\cos.rx}^2}{x^2} = \frac{\pi.r}{4} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.x}^2 \cdot \overline{\cos.rx}^3}{x} = \frac{\log.15}{16} .$$

etc.

$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^p \ \overline{\cos.r'x}^q}{x^n}$ { p et q étant des nombres entiers positifs, voyez le n.° 19.

LIMITES des intégrales.

$x = 0$,

$x = \infty$.

$$\int \frac{dx.e^{-ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}}{x} = -\mathrm{A} - \log.a - \log.0 = \infty.$$

$$\int \frac{dx\,(e^{-a'x} - e^{-ax})}{x} = \log.a - \log.a'.$$

$$\int dx.e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

$\int \frac{dx.e^{-ax}}{x^n}$ { n étant < 1 ; voyez le n.° 20.

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2 + m^2} = \frac{\pi}{2m}.e^{-mr}.$$

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2 + m^2} = \frac{\pi}{2}.e^{-mr}.$$

$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2p}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{x^2 + m^2}$

$\int \frac{xdx.\overline{\sin.rx}^{2p+1}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{x^2 + m^2}$

} p et q étant des nombres entiers positifs, voyez le n.° 22.

$$\int dx.e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{-2a}.$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx.e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)} = e^{-\frac{1}{n}}.\sqrt{2\pi n}.$$

LIMITES des intégrales.

$x = 0$,

$x = \infty$.

LIMITES des intégrales.

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2 - m^2} = -\frac{\pi.\sin.mr}{2m}.$$

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2 - m^2} = \frac{\pi}{2}.\cos.mr.$$

Limites : $x = 0$, $x = \infty$.

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x - m} = \pi.\cos.mr = \int \frac{dx.\sin.rx}{x + m}.$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x - m} = -\pi.\sin.mr = -\int \frac{dx.\cos.rx}{x + m}.$$

Limites : $x = -\infty$, $x = +\infty$.

$$\int dx.e^{-x^2}.\cos.rx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}.\sin.rx}{x} = \text{arc.tang.}\frac{r}{a}.$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}.\cos.rx}{x} = -(A + \log.\sqrt{a^2 + r^2} + \log.0) = \infty.$$

$$\int \frac{dx\,(e^{-a'x}.\cos.r'x - e^{-ax}.\cos.rx)}{x} = \frac{1}{2}.\log.\left(\frac{a^2 + r^2}{a'^2 + r'^2}\right).$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}(\cos.r'x - \cos.rx)}{x^2} = \frac{a}{2}.\log.\left(\frac{a^2 + r'^2}{a^2 + r^2}\right) + r.\text{arc.tang.}\frac{r}{a} - r'.\text{arc.tang.}\frac{r'}{a}.$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx(e^{-a'x} - e^{-ax})}{x^2} = \frac{r}{2}.\log.\left(\frac{a^2 + r^2}{a'^2 + r^2}\right) + a\,\text{arc.tang.}\frac{r}{a} - a'\,\text{arc.tang.}\frac{r}{a'}.$$

Limites : $x = 0$, $x = \infty$.

LIMITES des intégrales.

$$\int dx.\,e^{-x^2}.\,\overline{\sin.rx}^{\,2p}.\,\overline{\cos.r'x}^{\,q}\,;$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}.\overline{\sin.rx}^{\,p}.\overline{\cos.r'x}^{\,q}}{x}\,;$$

p et q étant des nombres entiers positifs, voyez les n.[os] 34 et 35.

Limites : $x=0$, $x=\infty$.

$$\int \frac{(x^n-1)dx}{\log.x} = \log.(n+1).$$

$$\int \frac{(x^m-x^n)dx}{\log.x} = \log.\left(\frac{m+1}{n+1}\right).$$

$$\int \frac{(x^n-1)dx}{(\log.x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}-1\right\}.$$

$$\int \frac{(x^m-x^n)dx}{(\log.x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{m+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right\}.$$

Limites : $x=0$, $x=1$.

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^{\,2n+1}}{1+x^2} = 0.$$

n étant un nombre entier positif.

$$\int \frac{dx.\mathrm{tang}.rx}{x} = \frac{\pi}{2} = \int \frac{dx.\sin.rx}{x},$$

$$\int \frac{dx.\log.\cos.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}.\log.\left(\frac{e^{2mr}+1}{2e^{2mr}}\right).$$

$$\int \frac{dx.\log.\mathrm{tang}.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}.\log.\left(\frac{e^{2mr}-1}{e^{2mr}+1}\right).$$

$$\int \frac{dx.\log.\sin.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}.\log.\left(\frac{e^{2mr}-1}{2e^{2mr}}\right).$$

Limites : $x=0$, $x=\infty$.

	LIMITES des intégrales.
$\int \frac{xdx.\text{tang}.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{2mr}+1}$.	
$\int \frac{xdx.\text{coséc}.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi.e^{mr}}{e^{2mr}-1}$.	
$\int \frac{xdx.\text{cot}.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{2mr}-1}$.	$x=0$,
$\int \frac{xdx.\text{tang}.rx}{x^2-m^2} = \frac{\pi}{2}$.	$x=\infty$.
$\int \frac{xdx.\text{coséc}.rx}{x^2-m^2} = 0$.	
$\int \frac{xdx.\text{cot}.rx}{x^2-m^2} = -\frac{\pi}{2}$.	

Pag.	Lign.	FAUTES.	CORRECTIONS.
43.	5.	$(q+3)$	$(q+4)$
80.	14.	$+\frac{m^4 r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\ldots$	$+\frac{m^4 r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\ldots$
90.	11.	$+\frac{a^3}{1.2.3.4.5.5}$	$+\frac{a^5}{1.2.3.4.5.5}$